

Universidade Federal de Santa Catarina
I Encontro de Pós-Graduandos em Matemática na UFSC

Livro de resumos



Florianópolis - SC
01 e 02 de Dezembro de 2022

Sumário

1. Sobre o encontro
2. Trabalhos nível graduação - Tipo A
 - a) Alek Frohlich - Análise funcional voltada a Métodos de Kernel
 - b) Aline Kowalski - Elementos primos e elementos irredutíveis do Anel $\mathbb{Z}_n$
 - c) Gearlisson dos Santos Mendonça - Um estudo sobre métodos de máxima descida e acelerações.
 - d) Jhuliane Cristina Seger - Teorema do Ponto Fixo de Brouwer em dimensão 1
 - e) Luiz Guilherme de Carvalho Lopes - Homeomorfismos Ergódicos e o Teorema de Oxtoby-Ulam
 - f) Matheus Miotto Calione - Séries de Fourier e a Solução do Problema Clássico da Equação do Calor na Barra Finita
 - g) Taina da Silva - Resolução de sistemas lineares no corpo $\mathbb{Z}_p$
3. Trabalhos nível mestrado - Tipo B
 - a) Alexsandro Schneider - Polya e a Teoria da resolução de problemas aplicados à Educação Matemática nos Ensino Fundamental e Médio
 - b) Bruna Arielly Schulz - Álgebra de caminhos de Leavitt fortemente $\mathbb{Z}$ -graduado
 - c) Francisco Gabriel Klock Campos Vidal - Ações parciais do ponto de vista categórico
 - d) Guilherme de Martini - Existência, Unicidade e Comportamento Assintótico de Solução de um Sistema de Timoshenko com História e Lei de Cattaneo
 - e) Helena Günther - A função zeta, de Euler a Riemann: uma introdução à teoria analítica de números
 - f) Juan Carlos Oyola Ballesteros - Método de Galerkin Descontínuo para Fluxos em Meios Porosos Fraturados
 - g) Marco Antônio Pauleti - Método das Projeções Relaxadas com Penalização Uniformemente Convexa para Solução de Sistemas Lineares Mal-Postos em Espaços de Banach
 - h) Matheus Wallace Silva Carvalho - A aplicabilidade do Teorema de Reconstrução de Tannaka para álgebras de Hopf
 - i) Pedro Gabriel Papa Torelli - O Problema das Equações Diferenciais de Onda-Difusão Tempo-Fracionárias
4. Trabalhos nível doutorado - Tipo C
 - a) Alessandra Piske - Equações de evolução envolvendo um operador tipo Laplaciano-logarítmico
 - b) Carlos Pecorari Neto - Atratores exponenciais para semigrupos κ -dissipativos
 - c) Fabiano Pereira - Sistemas Dinâmicos Impulsivos

- d) Francieli Triches - Listas e matrizes de incidência como formas de compreensão do divisor excepcional de folheações de codimensão um em $\mathbb{C}^3$
- e) Leonardo Guarnieri Justino - Leis Distributivas Parciais
- f) Rafaela Filippozzi - A new heuristic to solve the spherical convex-hull membership problem

5. Palestras

1 Sobre o Encontro

1.1 Resumo

Evento científico para estudantes de Graduação e Pós-Graduação em Matemática na UFSC, tendo como objetivo principal estabelecer conexões entre esses e sendo também um espaço para apresentação de trabalhos (trabalhos de conclusão de curso, dissertações e teses). Uma das consequências da pandemia é que os alunos estão estudando de forma mais individual e, portanto, não tendo tantas relações de trocas científicas com outros estudantes. Assim, iremos abrir espaço para que estes apresentem suas pesquisas recentes em matemática. Outro objetivo que temos é apresentar as áreas de pesquisa do nosso departamento para os estudantes que estão no começo da pós-graduação do nosso programa ou até mesmo estudantes de graduação (da UFSC ou de outras universidades do estado) que pensam em fazer parte do nosso corpo docente. Por fim, propomos duas mesas redondas que tratarão de temas importantes a serem discutidos, não só na comunidade matemática, mas também na sociedade em geral.

1.2 COMISSÕES

Comissão Organizadora:

- Prof. Dr. Daniel Gonçalves (MTM/UFSC)
- Prof. Dr. Douglas Soares Gonçalves (MTM/UFSC)
- Prof. Dr. Paulo Mendes de Carvalho Neto (MTM/UFSC)

Pós-graduandos

- Francieli Triches
- Rafael Borges de Souza
- Rafaela Filippozzi
- Taina da Silva

Comissão Científica:

- Prof. Dr. Daniel Gonçalves (MTM/UFSC)
- Prof. Dr. Douglas Soares Gonçalves (MTM/UFSC)
- Prof. Dr. Eliezer Batista (MTM/UFSC)
- Prof. Dr. Ivan Pontual Costa e Silva (MTM/UFSC)
- Prof. Dr. Leonardo Koller Sacht (MTM/UFSC)
- Prof. Dr. Matheus Cheque Bortolan (MTM/UFSC)
- Prof. Dr. Paulo Mendes de Carvalho Neto (MTM/UFSC)

1.3 Público Alvo

Estudantes de pós-graduação em matemática da UFSC. Estudantes de graduação da UFSC com interesse em ingressar no Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSC. Estudantes de graduação e pós-graduação de outras universidades de Santa Catarina com interesse em ingressar no Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSC.

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 Objetivo Geral

Incentivar, divulgar e socializar conhecimentos matemáticos entre estudantes de graduação e pós-graduação, além de apresentar o programa de pós-graduação em matemática pura e aplicada da UFSC para possíveis novos ingressantes.

1.4.2 Objetivos Específicos

Promover interação e divulgação científica entre estudantes de graduação e pós-graduação em matemática; Apresentar as principais áreas de pesquisa do departamento de matemática da UFSC; Incentivar discussões sobre diversidade nas exatas; Elucidar ideias do que fazer depois da pós-graduação em matemática; Incentivar alunos de outras universidades a fazerem parte do corpo discente/docente do departamento de matemática da UFSC; Realizar palestras com professores pesquisadores de matemática de outras instituições.

1.5 Programação

CRONOGRAMA - I ENCONTRO DE PÓS-GRADUANDOS EM MATEMÁTICA NA UFSC	
Horário	Dia 01/12
09:00 - 09:30	Abertura
09:30 - 09:50	Método de Galerkin Descontínuo para Fluxos em Meios Porosos Fraturados (Juan Carlos Oyola Ballesteros)
09:50 - 10:10	Método das Projeções Relaxadas com Penalização Uniformemente Convexa para Solução de Sistemas Lineares Mal-Postos em Espaços de Banach (Marco Antônio Pauleti)
10:10 - 10:45	Intervalo
10:45- 11:15	Apresentação de área - Equações diferenciais e sistemas dinâmicos - (Prof Dr. Matheus Bortolan)
11:15 - 11:35	O Problema das Equações Diferenciais de Onda-Difusão Tempo-Fracionárias (Pedro Gabriel Papa Torelli)
11:35 - 11:55	Existência, Unicidade e Comportamento Assintótico de Solução de um Sistema de Timoshenko com História e Lei de Cattaneo (Guilherme de Martini)
11:55 - 12:15	A função zeta, de Euler a Riemann: uma introdução à teoria analítica de números (Helena Günther)
12:15 - 14:00	Intervalo para ALMOÇO
14:00 - 14:30	Apresentação de área - Otimização (Prof Dr. Maicon Alves)
14:30 - 15:30	Alguns temas explorados em dissertações do PROFMAT da UFPR (Prof. Dr. Luiz Antônio Ribeiro Santana)
15:30 - 16:30	Coffee Break + Sessão de Pôsteres de Graduação
16:30 – 17:00	Apresentação de área - Geometria (Prof. Dr. Francisco Caramello Jr.)
17:00 - 17:20	Álgebra de caminhos de Leavitt fortemente Z-graduado (Bruna Arielly Schulz)
17:20 - 17:40	A aplicabilidade do Teorema de Reconstrução de Tannaka para álgebras de Hopf (Matheus Wallace Silva Carvalho)
17:40 - 18:00	Ações parciais do ponto de vista categórico (Francisco Gabriel Klock Campos Vidal)
18:00 - 19:30	Mesa redonda - O que fazer depois da pós-graduação em Matemática?

Horário	DIA 02/12
08:00 - 08:25	Leis Distributivas Parciais (Leonardo Guarnieri Justino)
08:25 - 08:50	A new heuristic to solve the spherical convex-hull membership problem (Rafaela Filippozzi)
08:50 - 09:15	Listas e matrizes de incidência como formas de compreensão do divisor excepcional de folheações de codimensão um em C^3 (Francieli Triches)
09:15 - 09:40	Atratores exponenciais para semigrupos κ -dissipativos (Carlos Pecorari Neto)
09:40 - 10:05	Sistemas Dinâmicos Impulsivos (Fabiano Pereira)
10:05 - 10:35	Coffee Break
10:35 - 11:05	Apresentação de área - Álgebras de operadores (Prof Dr. Alcides Buss)
11:05 - 11:35	Apresentação de área - Análise numérica (Prof Dr. Everton Boos)
11:35 - 12:35	Caos em baixas dimensões - medindo a complexidade de sistemas dinâmicos (Prof. Dr. Fabio Tal)
12:35 - 14:05	Intervalo para ALMOÇO
14:05 - 14:35	Apresentação de área - Álgebra - Prof Dr. Eliezer Batista
14:35 - 15:35	Um convite ao estudo de álgebras não associativas e teoria de identidades polinomiais (Profa. Dra. Manuela Souza)
15:35 - 16:00	Equações de evolução envolvendo um operador tipo Laplaciano-logarítmico (Alessandra Piske)
16:00 - 18:00	Coffee Break + Jogo do BRASIL x Camarões
18:00 - 19:30	Mesa Redonda - Diversidades sociais, étnico-raciais e de gênero nas exatas

2 Trabalhos nível graduação - Tipo A

Esta seção é dedicada aos resumos expandidos dos trabalhos a nível de graduação, que foram apresentados no formato de pôsteres durante o Encontro.

Sumário

1. Alek Frohlich - Análise funcional voltada a Métodos de Kernel
2. Aline Kowalski - Elementos primos e elementos irreduzíveis do Anel $\mathbb{Z}_n$
3. Gearlisson dos Santos Mendonça - Um estudo sobre métodos de máxima descida e acelerações.
4. Jhulienne Cristina Seger - Teorema do Ponto Fixo de Brouwer em dimensão 1
5. Luiz Guilherme de Carvalho Lopes - Homeomorfismos Ergódicos e o Teorema de Oxtoby-Ulam
6. Matheus Miotto Calione - Séries de Fourier e a Solução do Problema Clássico da Equação do Calor na Barra Finita
7. Taina da Silva - Resolução de sistemas lineares no corpo $\mathbb{Z}_p$

Análise Funcional voltada a Métodos de Kernel

Alek Frohlich¹, Danilo Royer², Mauro Roisenberg³.

Palavras-chave: Aprendizado Supervisionado, Métodos de Kernel, Espaços de Hilbert de Reprodução.

A troca de representação de conjuntos de dados é uma técnica utilizada no Aprendizado de Máquina. Para alguns algoritmos conhecidos como Métodos de Kernel, há disponível uma técnica de troca de representação poderosa: o Truque do Kernel. Para estes algoritmos, a única informação relevante do conjunto de dados é o valor do produto interno entre pares de vetores de treino. Isto é, a quantidade: $\langle x_i, x_j \rangle$. Por consequência, qualquer transformação $\phi : X \rightarrow H$ aplicada sobre o conjunto de dados só aparecerá em expressões da forma: $\langle \phi(x_i), \phi(x_j) \rangle$. É um fato interessante que conseguimos encontrar funções⁴ da forma $K(x, y) = \langle \phi(x), \phi(y) \rangle$, onde ϕ e H estão implícitos, que são úteis para a resolução de problemas de Aprendizado de Máquina. Um exemplo é o Kernel Gaussiano, que é altamente usado em conexão com algoritmos como Kernel-SVM e Kernel-PCA:

$$K(x, y) = e^{-\gamma \|x-y\|^2}. \quad (1)$$

É possível se dizer que a relação de kernels com Aprendizado de Máquina começou com a descoberta de que o Perceptron não era capaz de classificar conjuntos de dados não linearmente separáveis [4]. De fato, o Kernel-Perceptron foi o primeiro algoritmo de classificação a ser adaptado para o uso de kernels. Neste caso, o Truque do Kernel consiste em mapear o conjunto de dados para um espaço de dimensão maior, de forma que se torne linearmente separável. Veja a Figura 1. Dentre os vários usuários de kernels, o algoritmo mais proeminente é o Kernel-SVM, introduzido por Vapnik na década de 90 [1].

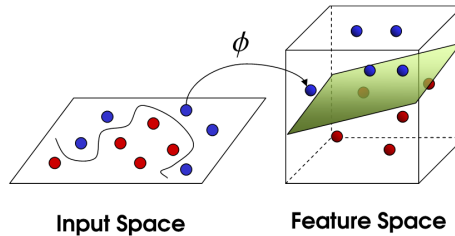


Figura 1: ϕ faz com que o conjunto de dados se torne linearmente separável. Fonte: adaptado de [6].

O principal objetivo deste trabalho é esclarecer as bases teóricas em que estão fundamentados os Métodos de Kernel. Em particular, almejamos encontrar uma caracterização mais simples de kernel reproduzidor que nos permita verificar que os principais kernels da literatura de Métodos de Kernel de fato são kernels reproduzidores. Ademais, aproveitamos para justificar que o Perceptron é um Método de Kernel; isto é, que depende apenas do valor do produto interno $\langle x_i, x_j \rangle$ entre os vetores de treino⁵. Por fim, nossa discussão permite formular o Teorema do Representante, uma ferramenta teórica importante na demonstração da corretude de outros Métodos de Kernel mais complexos que o Perceptron.

¹Bacharel em Ciências da Computação. UFSC. E-mail: alek.frohlich@gmail.com.

²Doutor em Matemática. Departamento de Matemática. UFSC.

³Doutor em Ciências da Computação. Departamento de Informática e Estatística. UFSC.

⁴Tais funções receberão o nome de kernels reproduzidores ao longo do texto.

⁵É comum encontrar provas de corretude de Métodos de Kernel sob a suposição que os vetores estão em $\mathbb{R}^n$ e o produto interno é o produto escalar. Embora facilite a explicação, abordagens nestes moldes excluem os casos em que o kernel reproduzidor opera sobre um espaço de dimensão infinita. Infelizmente, esse é um dos casos mais relevantes, visto que o Kernel Gaussiano está associado a um Espaço de Hilbert de dimensão infinita.

Para alcançar esses objetivos, introduzimos elementos da teoria dos Espaços de Hilbert e apresentamos o algoritmo Perceptron. Da Análise Funcional, os resultados mais relevantes abrangem o completamento de um espaço com produto interno, noções de convergência em espaços de funções e a generalização da desigualdade de Cauchy-Schwarz para formas bilineares positivo semidefinidas. Por fim, apresentamos alguns resultados envolvendo funções simétricas e positivo definidas.

O trabalho culmina com a introdução dos Espaços de Hilbert de Reprodução e a demonstração do Teorema de Moore-Aronszajn, que nos permite demonstrar que o Kernel Gaussiano é um kernel reproduzidor. A respeito da corretude do Kernel-Perceptron, conseguimos obter o Teorema 2.

Teorema 1. (Moore-Aronszajn) *Seja $K : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função simétrica e positivo definida sobre um conjunto X , então existe um único Espaço de Hilbert de Reprodução H_K cujo kernel reproduzidor associado é K .*

Teorema 2. (Corretude do K -Perceptron) *Seja $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ um conjunto de treino linearmente separável pela origem tal que haja w^* que corretamente o classifique com margem γ . Sob estas condições, o número de erros t que o algoritmo comete antes de terminar é limitado superiormente da seguinte forma:*

$$t \leq \left(\frac{R}{\gamma} \right)^2, \quad (2)$$

em que $R := \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|$.

Este trabalho se baseou em [3] para os elementos de Espaços de Hilbert e em [2] para Métodos de Kernel. A discussão a respeito do Teorema do Representante pode ser encontrada na versão íntegra do TCC ou, alternativamente, em [5].

Referências

- [1] Bernhard E. Boser, Isabelle M. Guyon e Vladimir N. Vapnik. “A Training Algorithm for Optimal Margin Classifiers”. Em: **Proceedings of the Fifth Annual Workshop on Computational Learning Theory**. New York, NY, USA, 1992, pp. 144–152. ISBN: 089791497X.
- [2] Nello Cristianini. **An introduction to support vector machines and other kernel-based learning methods**. Cambridge New York: Cambridge University Press, 2000. ISBN: 9780511801389.
- [3] E. Kreyszig. **Introductory Functional Analysis with Applications**. Wiley Classics Library. Wiley, 1989. ISBN: 9780471504597.
- [4] Marvin Minsky. **Perceptrons; an introduction to computational geometry**. Cambridge, Mass: MIT Press, 1969. ISBN: 9780262130431.
- [5] BERNHARD SCHLKOPF. **LEARNING WITH KERNELS : support vector machines, regularization, optimization, and beyond**. Place of publication not identified: MIT Press, 2018. ISBN: 9780262536578.
- [6] Eugenio Vocaturo, Diego Perna e Ester Zumpano. “Machine Learning Techniques for Automated Melanoma Detection”. Em: **BIBM**. 2019, pp. 2310–2317. DOI: 10.1109/BIBM47256.2019.8983165.

ELEMENTOS PRIMOS E ELEMENTOS IRREDUTÍVEIS DO ANEL $\mathbb{Z}_n$

Aline Kowalski¹, Felipe Vieira²

Palavras-chave: anel $\mathbb{Z}_n$, elementos primos, elementos irredutíveis.

O presente trabalho tem como objetivo a caracterização do conjunto dos elementos primos e também do conjunto de elementos irredutíveis de um anel de inteiros módulo n qualquer, estes serão os Teorema 1 e Teorema 2, respectivamente. Além disso, também será demonstrado como descobrir a quantidade de elementos que cada conjunto possui no Corolário 1 do Teorema 3. Este trabalho consiste na síntese do trabalho de conclusão de curso da autora e foi inteiramente baseado em [1]. Além disso, para realizar as demonstrações de cada Teorema e Corolário, foram consultadas as referências [2], [3], [4] e [5] acerca de diversos resultados de temas como divisibilidade e máximo divisor comum, os quais serão omitidos deste resumo.

A seguir, lembraremos três definições antes de abordarmos cada um dos três Teoremas principais do trabalho, o que consiste em ser um elemento primo em $\mathbb{Z}_n$, um elemento irredutível em $\mathbb{Z}_n$ e função φ de Euler, respectivamente, 1, 2 e 3.

Definição 1. Sejam $\bar{p}, \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$. Um elemento $\bar{0} \neq \bar{p}$ é primo se $\bar{p} \mid \bar{a} \cdot \bar{b}$, então $\bar{p} \mid \bar{a}$ ou $\bar{p} \mid \bar{b}$, $\forall \bar{a}, \bar{b}$.

Dado um anel $\mathbb{Z}_n$ qualquer, conseguimos caracterizar o conjunto de seus elementos primos, como veremos a seguir.

Teorema 1. Seja $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, caracterizamos o conjunto de elementos primos de $\mathbb{Z}_n$ como

$$\{\bar{a} \in \mathbb{Z}_n : \exists p \in \pi_n, p < n, \text{mdc}(a, n) = p\},$$

em que π_n é o conjunto de números primos que dividem n .

Definição 2. Seja $\bar{0} \neq \bar{a} \in \mathbb{Z}_n$. Este elemento será irredutível, se $\bar{a}$ não for inversível, e sempre que existirem $\bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_n$ tais que $\bar{a} = \bar{b}\bar{c}$, e $\bar{b}$ ou $\bar{c}$ será inversível.

Em um anel $\mathbb{Z}_n$ qualquer, conseguimos caracterizar o conjunto de seus elementos irredutíveis, caso sejam atendidas as especificações abaixo.

Teorema 2. Dado $n \in \mathbb{N}^*$, definimos o conjunto de elementos irredutíveis de $\mathbb{Z}_n$ como

$$\{\bar{a} \in \mathbb{Z}_n : \exists p \in \pi_n, p^2 \mid n, \text{mdc}(a, n) = p\},$$

em que π_n é o conjunto de números primos que dividem n .

Se faz necessário lembrar do que trata a função φ de Euler, pois esta aparece no Corolário 1.

Definição 3. Seja m um inteiro positivo. Denotaremos $\varphi(m)$ o número de inteiros t tais que

- $1 \leq t \leq m$;
- $\text{mdc}(t, m) = 1$.

E para verificar a cardinalidade de cada conjunto definido nos Teorema 1 e Teorema 2 anteriormente, utilizamos o Corolário 1 do Teorema 3.

Teorema 3. Seja $n = pm \in \mathbb{N}$ e $A_p = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}_n : \text{mdc}(a, n) = p\}$, em que A_p é o conjunto de elementos primos de $\mathbb{Z}_n$. Então, a função $f : A_p \rightarrow U(\mathbb{Z}_m)$ definida por $f(\bar{a}) = \left[\frac{a}{p} \right]_m$ é bem definida e bijetora. Em que $U(\mathbb{Z}_m) = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}_n : \text{mdc}(a, n) = 1\}$.

¹Graduanda do curso de Licenciatura em Matemática - Universidade Federal de Santa Catarina - campus Blumenau - aline.kowalski@gmail.com.

²Departamento de Matemática - Universidade Federal de Santa Catarina - campus Blumenau - f.vieira@ufsc.br

Corolário 1. Em $\mathbb{Z}_n$, a quantidade de elementos:

1. primos é dada por

$$\sum_{\substack{p \in \pi_n \\ p < n}} \varphi\left(\frac{n}{p}\right),$$

2. irredutíveis é dada por

$$\sum_{\substack{p \in \pi_n \\ p^2 | n}} \varphi\left(\frac{n}{p}\right),$$

em que φ é a função de Euler.

Em suma, foi possível rever a teoria de anéis, além de compreender e entender o mecanismo que nos permite contar e descrever quem são os elementos primos e quem são os elementos irredutíveis de um anel $\mathbb{Z}_n$ qualquer.

Referências

- [1] M. H. Jafari e A. R. Madadi, “Prime and irreducible elements of the ring of integers modulo n ,” **The Mathematical Gazette**, v. 96, n. 536, pp. 283–287, 2012.
- [2] A. Gonçalves, **Introdução à Álgebra**, 2^a ed. IMPA, 1979.
- [3] F. Vieira e R. A. de Carvalho, **Elementos de Aritmética e Álgebra**, 1^a ed. SBM, 2020.
- [4] F. Martinez, C. G. Moreira, N. Saldanha e E. Tengan, **Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**, 2^a ed. Rio de Janeiro, 2018. endereço: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv99700.pdf> (acesso em 16/08/2019).
- [5] O. R. Janesch e I. J. Tanejaa, **Álgebra I**, 2^a ed. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2011. endereço: <https://mtmgrad.paginas.ufsc.br/files/2014/04/%5C%C3%5C%81lgebra-I.pdf> (acesso em 22/09/2022).

Um estudo sobre métodos de máxima descida e acelerações

Gearlisson dos Santos Mendonça¹, Douglas Soares Gonçalves²

Palavras-chave: Máxima Descida, Aceleração de Nesterov, Gradiente Espectral.

Os **métodos de direções de descida** são métodos iterativos para resolução de problemas de otimização irrestrita: minimizar $f(x)$, sujeito a $x \in \mathbb{R}^n$, em que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável e com gradiente Lipschitz, de constante $L > 0$.

Tais métodos, a partir de um ponto inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dado, geram uma sequência $\{x_k\}_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ dada por:

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k, \quad (1)$$

em que $d_k \in \mathbb{R}^n$ é direção de descida tal que $\nabla f(x_k)^T d_k < 0$ e $t_k > 0$ é o tamanho de passo, em geral escolhido de modo a garantir $f(x_{k+1}) < f(x_k)$.

Neste trabalho discutimos sobre métodos nos quais a direção d_k é um múltiplo de $-\nabla f(x_k)$ e damos ênfase ao método de Cauchy [3], e variações recentes, como o método de Nesterov [3] e o método do gradiente espectral [1]. Para estes métodos estudamos tanto a complexidade de pior caso quanto o desempenho prático.

O **método de Cauchy**, também conhecido como método de máxima descida, utiliza em (1) $d_k = -\nabla f(x_k)$ e o tamanho de passo $t_k > 0$ pode ser calculado de diferentes maneiras. Por exemplo, se a constante de Lipschitz L é conhecida, podemos usar $t_k = 1/L$ e outra escolha possível é dada pela busca linear exata: $t_k = \arg \min \{f(x_k - t\nabla f(x_k)) \mid t > 0\}$.

Para este método, é possível mostrar (veja [3, Teorema 1.2.4]) que quando f é também convexa, com minimizador global $x^* \in \mathbb{R}^n$ e usamos $t_k = 1/L$, vale para $k = 1, 2, \dots$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq (L\|x_0 - x^*\|^2)/(2k). \quad (2)$$

Assim, dizemos que este método tem taxa de convergência $\mathcal{O}(k^{-1})$.

No **método de Nesterov** (ou gradiente acelerado de Nesterov) ao invés de x_k , o gradiente da função é avaliado em um ponto y que é definido como uma extrapolação de x_{k-1} ao longo da direção $x_k - x_{k-1}$, ou seja, $y = x_k + \beta_k(x_k - x_{k-1})$, em que $\beta_k = \theta_k(\theta_{k-1}^{-1} - 1)$ e $\theta_k \in (0, 1)$ [3].

Além das escolhas de tamanho de passo já discutidas para o método de Cauchy, para este método podemos considerar a busca linear inexata ou *backtracking* em que $t_k > 0$ deve satisfazer

$$f(x_{k+1}) \leq f(y) - (t_k/2)\|\nabla f(x_k)\|^2.$$

Em comparação com (2), o método de Nesterov com tamanho de passo constante $t_k = t \in (0, 1/L]$ e com $\theta_k = 2/(k+2)$ satisfaz (veja [3, Teorema 5.1]):

$$f(x_k) - f(x^*) \leq (2\|x_0 - x^*\|^2)/(t(k+1)^2). \quad (3)$$

Esse método garante a taxa de convergência ótima $\mathcal{O}(k^{-2})$ para métodos de primeira ordem.

Outro método de primeira ordem introduzido em [1] é o **método do gradiente espectral**. Para este método em (1) é usada $d_k = -\lambda_k^{-1}\nabla f(x_k)$, em que o escalar é conhecido como parâmetro espectral e é definido como

$$\lambda_k = \max \left\{ \delta_{\min}, \min \left\{ \delta_{\max}, \frac{(x_k - x_{k-1})^T (\nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1}))}{(x_k - x_{k-1})^T (x_k - x_{k-1})} \right\} \right\},$$

e $0 < \delta_{\min} < \delta_{\max} < \infty$ são salva-guardas para evitar que este fique muito grande ou muito próximo de zero, e a outra razão busca estimar a curvatura de f ao longo da direção $x_k - x_{k-1}$.

¹Estudante de Bacharelado em Matemática.UFSC. gearlissonmendonca@gmail.com

²Doutor em Matemática.Departamento de Matemática.UFSC. douglas.goncalves@ufsc.br

O tamanho de passo t_k é determinado usando busca linear não-monótona: dados $\gamma \in (0, 1)$, $M \in \mathbb{Z}_+^*$, $0 \leq m_k \leq \min\{m_{k-1} + 1, M\}$ escolha $t_k > 0$ que satisfaça a condição:

$$f(x_k + t_k d_k) < \max_{0 \leq j \leq m_k} f(x_{k-j}) + t_k \gamma \nabla f(x_k)^T d_k.$$

Para este método é possível provar que para $\varepsilon \in (0, 1]$, e f convexa e com gradiente Lipschitz, temos que $f(x_k) - f(x^*) \leq \varepsilon$ em no máximo $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ iterações [2].

Para avaliar o desempenho prático dos métodos, estes foram implementados em Matlab e consideramos experimentos envolvendo funções quadráticas com Hessiana simétrica definida positiva com dimensão n variando de 2 a 5000. Na implementação utilizamos como critério de parada $\|\nabla f(x_k)\| < 10^{-6}$ ou um número máximo de iterações $K = 2000$. Os resultados numéricos indicam que o método de gradiente espectral, em média, alcança o primeiro critério de parada em menos iterações que os demais. A Figura 1 ilustra os valores funcionais ao longo das iterações para um problema de dimensão $n = 100$. Neste gráfico observamos que todos os métodos foram capazes de reduzir o valor funcional até próximo do valor ótimo $f(x^*) = 0$. Ainda, observa-se que os métodos de Cauchy garantem um decréscimo monótono da função, em oposição aos demais.

A fim de evidenciar a performance de pior caso dos métodos, também fizemos testes com a “pior função do mundo” [3, Página 57] que é uma quadrática com Hessiana Tridiagonal definida da forma

$$f_q(x) = \frac{L}{4} \left\{ \frac{1}{2} \left[x_1^2 + \sum_{i=1}^{q-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_q^2 \right] - x_1 \right\}, \text{ para } q = 1, \dots, n.$$

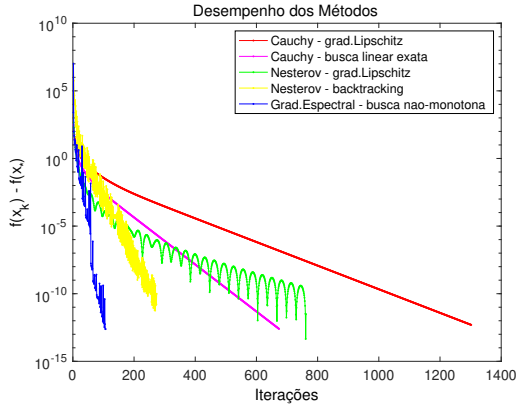


Figura 1: Desempenho dos Métodos

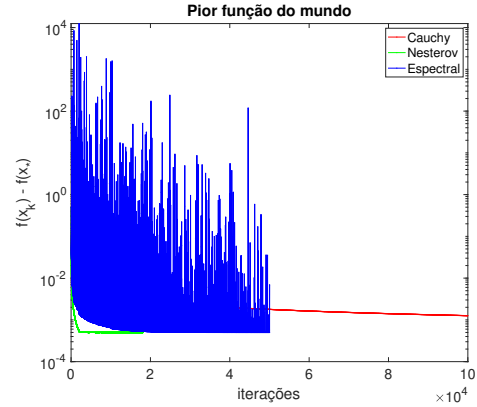


Figura 2: Pior Função do Mundo

Neste teste, consideramos $n = 2001$, $q = 1000$ e $K = 10^5$. A Figura 2 ilustra a diferença $f(x_k) - f(x^*)$ ao longo das iterações. Aqui fica claro o melhor desempenho do método de Nesterov.

Referências

- [1] J. Barzilai e J. M. Borwein. “Two-point step size gradient methods”. Em: **IMA Journal of Numerical Analysis** 8.1 (1988), pp. 141–148.
- [2] G. N. Grapiglia e E. W. Sachs. “On the worst-case evaluation complexity of non-monotone line search algorithms”. Em: **Computational Optimization and Applications** 68.3 (2017), pp. 555–577.
- [3] Y. Nesterov. **Introductory lectures on convex optimization: A basic course**. Vol. 87. Springer Science & Business Media, 2003.

Teorema do Ponto Fixo de Brouwer em dimensão 1

Jhuliene Cristina Seger¹, Naiara Vergian de Paulo Costa²

Palavras-chave: Compacidade; Continuidade; Intervalos fechados.

Neste trabalho estudamos o teorema do Ponto Fixo de Brouwer em dimensão 1, que nos garante a existência de um ponto fixo sempre que uma função contínua aplica um conjunto fechado dentro de si mesmo. Nosso objetivo principal é demonstrar o teorema citado.

A ideia de ponto fixo é um tanto simples e é compreendida como um ponto cuja imagem via certa função é o próprio ponto. Ou seja, dada uma função f e um ponto x_0 , se ao aplicar a função obtivermos que $f(x_0) = x_0$, então x_0 é um ponto fixo para esta tal função f .

Note que encontrar um ponto fixo para uma dada função $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ contínua, é o mesmo que encontrar um ponto de intersecção entre os gráficos de $y = f(x)$ e da função identidade $y = x$.

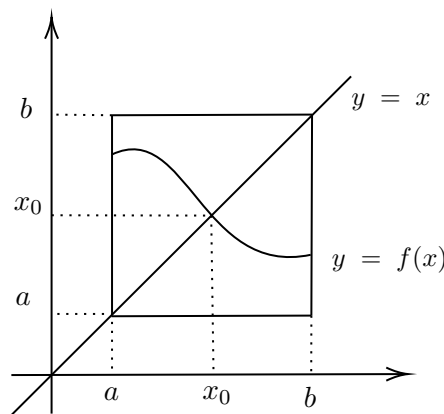


Figura 1: Gráfico de uma função f qualquer e reta $y = x$

Teorema 1 (Ponto Fixo de Brouwer em dimensão 1). *Qualquer função contínua $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ tem pelo menos um ponto fixo, isto é, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

O provamos a partir da construção de uma sequência de intervalos fechados encaixados, dividindo o intervalo fechado $[a, b]$ em subintervalos cujos pontos extremos são levados pela função em direções opostas.

Ao longo do trabalho, além de demonstrarmos o teorema como proposto, mostramos a equivalência do teorema do Ponto Fixo de Brouwer em dimensão 1 com os teoremas que seguem:

Teorema 2 (Valor Intermediário). *Seja f contínua definida no intervalo fechado $[a, b]$ tal que $f(a) < f(b)$. Se um número c satisfaz a condição de $f(a) < c < f(b)$, então existe um ponto $x_0 \in [a, b]$ para o qual $f(x_0) = c$.*

Teorema 3 (Anulamento). *Se f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, $f(a)$ e $f(b)$ tiverem sinais contrários em relação ao eixo x , então existirá pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.*

Como aplicação do Teorema 1, demonstramos os teoremas 4, 5 e 6, a partir das equivalências comentadas anteriormente.

¹Licencianda em Matemática - Universidade Federal de Santa Catarina - Campus Blumenau - SC - jhulienecs01@gmail.com

²Departamento de Matemática (MAT) - Universidade Federal de Santa Catarina - Campus Blumenau - SC - naiara.vergian@ufsc.br

Teorema 4 (Borsuk-Ulam). *Seja $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, definida em um círculo de raio $r > 0$ e centrado na origem. Então existe um par de pontos antípodos x e x^* tais que $f(x) = f(x^*)$.*

Teorema 5 (Primeiro Teorema da Panqueca). *Sejam A e B regiões planas limitadas, então há uma reta dividindo cada uma em duas regiões de área igual.*

Teorema 6 (Segundo Teorema da Panqueca). *Se A é uma região plana limitada, então existem duas retas perpendiculares dividindo A em quatro regiões de área igual.*

Referências

- [1] Hamilton Luiz Guidorizzi. **Um Curso de Cálculo**. Vol. 1, 6. ed. Rio de Janeiro, LTC, 2018.
- [2] Wenderson Ferreira; Eder Martins; Márcio André Santos. **Os Teoremas das Panquecas**. v.06 n.01. Revista de Matemática de Ouro Preto. 2019.
- [3] Yu A. Shashkin. **Fixed Points**. Vol. 2. 1991.
- [4] Felipe Rodrigues Vaz. **Teoremas de ponto fixo e algumas aplicações**. Universidade Federal do Maranhão, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2015.

Homeomorfismos Ergódicos e o Teorema de Oxtoby-Ulam

Luiz Guilherme de Carvalho Lopes¹, Rômulo Maia Vermersch²

Palavras-chave: homeomorfismos, ergodicidade, topologia uniforme.

Dados um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{X}, \mu)$ e uma transformação mensurável $T : X \rightarrow X$, dizemos que T *preserva a medida* μ se $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{X}$.

Um conjunto $A \in \mathcal{X}$ é dito *T-invariante* se $T^{-1}(A) = A$.

Se T preserva μ , então T é dita *ergódica* se todo conjunto invariante tem medida 0 ou 1. Em outras palavras, T é ergódica se o *sistema dinâmico mensurável* $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ não admite subsistemas não-triviais.

Denotamos por $\mathcal{H}(I^n, \mu)$ o conjunto de todos os homeomorfismos sobre o cubo unitário n -dimensional que preservam μ (aqui μ é a medida de Lebesgue sobre I^n e será dita *volume*) munido da *métrica uniforme*:

$$d_u(f, g) = \max_{x \in I^n} d(f(x), g(x)) \quad (f, g \in \mathcal{H}(I^n)), \quad (1)$$

onde d denota a distância euclidiana em $\mathbb{R}^n$.

Agora, denotamos por $\mathcal{G}(I^n, \mu)$ o conjunto de todos os automorfismos que preservam o volume μ sobre I^n .

Considere a *métrica uniforme* sobre $\mathcal{G}(I^n, \mu)$:

$$d_1(f, g) = \inf\{\delta > 0 : \mu(\{x : |f(x) - g(x)| > \delta\}) = 0\} \quad (f, g \in \mathcal{G}(I^n, \mu)). \quad (2)$$

Observe que $d_1(f, g) = d_u(f, g)$ sempre que $f, g \in \mathcal{H}(I^n, \mu)$.

Considere também a *métrica fraca* sobre $\mathcal{G}(I^n, \mu)$:

$$d_2(f, g) = \inf\{\delta > 0 : \mu(\{x : |f(x) - g(x)| > \delta\}) < \delta\} \quad (f, g \in \mathcal{G}(I^n, \mu)). \quad (3)$$

Teorema 0.1. (Halmos)

Seja $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}(I^n, \mu)$ o conjunto dos automorfismos ergódicos. Então, $\mathcal{E}$ é um conjunto G_δ na topologia gerada pela métrica fraca d_2 .

Teorema 0.2. (Alpern)

Seja $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}(I^n, \mu)$ um subconjunto G_δ na topologia gerada pela métrica fraca d_2 .

Se $\mathcal{H}(I^n, \mu) \subset \overline{\mathcal{E}}^{unif.}$, então $\mathcal{E} \cap \mathcal{H}(I^n, \mu) \subset \mathcal{H}(I^n, \mu)$ é um conjunto G_δ denso na topologia gerada pela métrica uniforme d_1 .

Dados $n \geq 2$ e $m \in \mathbb{N}$ definimos a *decomposição diádica de ordem m de I^n* como a coleção dos $N = 2^{nm}$ subcubos congruentes da forma $\left[\frac{i_1}{2^m}, \frac{i_1+1}{2^m}\right] \times \dots \times \left[\frac{i_m}{2^m}, \frac{i_m+1}{2^m}\right]$ com $i_1, \dots, i_m \in \{0, \dots, 2^m - 1\}$.

Denotamos uma decomposição diádica por $\{\sigma_i\}_{i=1}^N$, onde σ_i é o i -ésimo subcubo de uma enumeração fixada arbitrariamente.

Uma *permutação diádica de ordem $m \in \mathbb{N}$* é uma transformação $P : I^n \rightarrow I^n$ que age sobre alguma decomposição diádica de ordem m de I^n , digamos $\{\sigma_i\}_{i=1}^N$, da seguinte maneira: $P(\sigma_i) = \sigma_{j(i)}$.

¹Bacharel em Matemática Pura e Aplicada. Departamento de Matemática. UFSC Florianópolis. e-mail: luizgui05@gmail.com.

²Doutor em Matemática. Departamento de Matemática. UFSC Florianópolis. e-mail: romulo.vermersch@ufsc.br.

Teorema 0.3. (Lax)

Dados $h \in \mathcal{H}(I^n, \mu)$ e $\varepsilon > 0$, se $m \in \mathbb{N}$ é suficientemente grande, então existe uma permutação diádica P cíclica de ordem m tal que $d_1(h, P) < \varepsilon$.

Teorema 0.4. *Seja P uma permutação diádica cíclica sobre uma decomposição $\{\sigma_i\}_{i=1}^N$ de I^n .*

Então, existe $f \in \mathcal{G}(I^n, \mu)$ ergódico tal que $d_1(P, f) < \max \text{diam}(\sigma_i)$, onde $\text{diam}(\sigma_i)$ denota o diâmetro de σ_i e $i = 1, \dots, N$.

O principal resultado deste trabalho é:

Teorema 0.5. (Oxtoby-Ulam)

Genericamente com respeito à topologia uniforme, um homeomorfismo que preserva a medida de Lebesgue sobre o cubo unitário n -dimensional é ergódico.

Ideia da prova:

Seja $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}(I^n, \mu)$ o conjunto dos automorfismos ergódicos.

Pelo Teorema de Halmos (Teorema 0.1), $\mathcal{E}$ é um conjunto G_δ na topologia gerada pela métrica fraca d_2 .

Pelo Teorema de Alpern (Teorema 0.2) é suficiente mostrar que $\mathcal{H}(I^n, \mu) \subset \overline{\mathcal{E}}^{\text{unif}}$.

Sejam $\varepsilon > 0$ e $h \in \mathcal{H}(I^n, \mu)$. Pelo Teorema de Lax (Teorema 0.3), para cada $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, existe P permutação diádica cíclica de ordem m tal que $d_1(h, P) < \varepsilon/2$.

Pelo Teorema 0.4, existe $f \in \mathcal{E}$ tal que $d_1(f, P) < \varepsilon/2$, donde $d_1(h, f) < \varepsilon$.

Daí, como $h \in \mathcal{H}(I^n, \mu)$ é arbitrário, obtém-se $\mathcal{H}(I^n, \mu) \subset \overline{\mathcal{E}}^{\text{unif}}$, como desejado.

Para uma exposição completa e detalhada dos resultados acima, veja o trabalho de conclusão de curso de graduação [2].

Referências

- [1] Steve Alpern e V. Prasad. **Typical Dynamics of Volume Preserving Homeomorphisms**. Vol. 139. Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 2001.
- [2] Luiz Guilherme de Carvalho Lopes. **Homeomorfismos Ergódicos e o Teorema de Oxtoby-Ulam**. <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/224913>, 2021.
- [3] Paul Halmos. **Lectures on Ergodic Theory**. Chelsea Publishing Company, 1956.
- [4] J. C. Oxtoby e S. M. Ulam. “Measure-preserving homeomorphisms and metrical transitivity.” Em: **Ann. of Math. (2)** 42.4 (1941), pp. 874–920.
- [5] Marcelo Viana e Krerley Oliveira. **Foundations on Ergodic Theory**. Vol. 151. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge, 2016.

Séries de Fourier e a Solução do Problema Clássico da Equação do Calor na Barra Finita

Matheus Miotto Calione¹, Eleomar Cardoso Júnior².

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais. Problema da Equação do Calor. Séries de Fourier.

O físico e matemático Joseph Fourier (1768-1830), por meio de artigos sobre o problema da condução do calor em uma barra finita, mostrou que uma função periódica e integrável, digamos $f(x)$, pode ser representada e entendida via uma série como

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (1)$$

em que a_0 , a_n e b_n são constantes reais e $l > 0$ é fixado. À série em (1), damos o nome de Série de Fourier.

Fourier analisou o Problema da Equação do Calor em uma barra finita, que pode ser representado matematicamente por

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, l] \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (2)$$

em que $u(x, t)$ é a temperatura da barra em um ponto x no tempo t , α é uma constante que varia de acordo com o material da barra, e $f(x)$ é a função que descreve a temperatura da barra no ponto x quando o tempo é nulo. Além disso, $u(x, 0) = f(x)$, $x \in [0, l]$, é chamada a condição inicial do problema e $u(0, t) = u(l, t) = 0$, $t \geq 0$, é chamada condição de contorno. Dizemos que o problema (2) é um problema de valor inicial e de contorno, ou, simplesmente, PVIC.

Neste trabalho, temos o objetivo de garantir que a solução do problema (2) existe e, além disso, é única. Para alcançarmos este objetivo, analisamos conceitos relevantes acerca da teoria de análise real, principalmente no que se refere a *seqüências e séries de funções* e *funções seccionalmente contínuas*. Apresentaremos a seguir dois resultados essenciais para provarmos o Teorema de Existência do PVIC (2). Salientamos que o espaço $C_{\mathbb{C}}(\Omega)$ é o espaço vetorial de funções contínuas $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

Teorema 0.1. (*Teste M de Weierstrass*). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto não vazio e $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ uma seqüência em $C_{\mathbb{C}}(\Omega)$. Suponha que existe uma seqüência numérica $\{M_n\}_{n=1}^{+\infty}$ tal que*

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty. \quad (3)$$

Então, a série de funções $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em Ω .

A seguir, consideramos que se $f \in C_{\text{per}}(2l)$, f é contínua e $2l$ -periódica. De forma análoga, se $f \in SC_{\text{per}}(2l)$ f é seccionalmente contínua e $2l$ -periódica.

Teorema 0.2. *Suponha que $f \in C_{\text{per}}(2l)$ seja diferenciável em $(-l, l)$ a menos de um número finito de pontos, com $f' \in SC_{\text{per}}(2l)$. Então, a série de Fourier de f converge uniformemente em $\mathbb{R}$ para f .*

Consideramos que se $f \in C([0, l])$, f é contínua e definida de $[0, l]$ nos reais. A partir dos Teoremas (0.1) e (0.2), conseguimos garantir que o problema (2) apresenta solução por meio do seguinte resultado:

¹Acadêmico. Departamento de Matemática da UFSC - Blumenau - SC - matheusmcalione@gmail.com

²Orientador. Departamento de Matemática da UFSC - Blumenau - SC - eleomar.junior@ufsc.br

Teorema 0.3. *Suponha que $f \in C([0, l])$, com $f(0) = f(l) = 0$. Suponha que f seja diferenciável em $[0, l]$ a menos de um conjunto finito de pontos com $f' \in SC([0, l])$. Então, a série*

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right)$$

com $x \in [0, l]$ e $t \geq 0$, em que

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

converge uniformemente em $[0, l] \times [0, +\infty)$ para uma função $u \in C([0, l] \times [0, +\infty)) \cap C^\infty([0, l] \times (0, +\infty))$, que é a solução PVIC (2).

Se $u(x, t)$ for, de fato, solução do PVIC (2), definimos a *Integral de Energia*, que é dada por

$$E(t) = \int_0^l (u(x, t))^2 dx, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Essa definição é relevante para provarmos o seguinte resultado:

Teorema 0.4. *Se o problema (2) tiver solução em $C([0, l] \times [0, +\infty)) \cap C^2([0, l] \times (0, +\infty))$, então ela será única.*

Com isso, garantimos que o problema (2) apresenta uma única solução.

Uma particularidade do problema (2) é a dependência contínua. Isto é, se tomarmos condições iniciais próximas, as soluções que geraremos estarão, de certa forma, próximas. É sobre isso que trataremos no próximo resultado. Seja $f \in C([0, l])$. Então, definimos que $\|f\|_\infty = \max_{x \in [0, l]} |f(x)|$.

Teorema 0.5. *Suponha que $f, \tilde{f} \in C([0, l])$, com $f(0) = f(l) = 0$ e $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(l) = 0$. Suponha que f e $\tilde{f}$ sejam diferenciáveis em $[0, l]$, a menos de um conjunto finito de pontos, com $f', \tilde{f}' \in SC([0, l])$ e considere que $u, \tilde{u} \in C([0, l] \times [0, +\infty)) \cap C^\infty([0, l] \times (0, +\infty))$ de tal forma que u e $\tilde{u}$ solucionem PVICs distintos como (2) em que f e $\tilde{f}$ são, respectivamente, as condições iniciais (quando $t = 0$). Então, existe M que pode depender de t mas que não depende de x , tal que*

$$|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| \leq M \cdot \|f - \tilde{f}\|_\infty,$$

para todo $(x, t) \in [0, l] \times [0, +\infty)$.

Para a realização deste estudo, nos debruçamos sobre as teorias de [1], [2], [3], [4] e, principalmente, de [5], analisando e detalhando os resultados apresentados pela autora.

Referências

- [1] FIGUEIREDO, Djairo Guedes; NEVES, Aloisio Freiria. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 3. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, (Coleção Matemática Universitária), 2015.
- [2] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**, Volume 1. 5. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2001.
- [3] LIMA, Elon Lages. **Análise Real**: Funções de Uma Variável. 12. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2016.
- [4] SODRÉ, Ulysses. **Notas de Séries de Fourier**. Notas de aula, UEL, 2003.
- [5] IÓRIO, Valéria de Magalhães. **EDP: Um Curso de Graduação**. Coleção Matemática Universitária: Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2010.

Resolução de sistemas lineares no corpo $\mathbb{Z}_p$

Taina da Silva¹, Luiz-Rafael Santos², Luiz Fernando Bossa³

Palavras-chaves: Sistemas lineares; Corpo $\mathbb{Z}_p$; Linguagem Julia.

A história mostra que, desde o surgimento de linguagens humanas mais complexas - em particular, a escrita -, métodos para codificar uma mensagem de modo que somente seu destinatário legítimo consiga interpretá-la foram pensados. O estudo desses métodos constitui a criptografia: do grego, *cryptos*, secreto ou oculto. Naturalmente, na mesma medida foram pensados métodos para decifrar códigos criptografados.

Um dos códigos de criptografia utilizados durante a história, é a cifra de Hill, que se utiliza de um anel $\mathbb{Z}_n$ em seu processo de cifragem.

Segundo [2], “A Cifra de Hill consiste em um sistema de criptografia por substituição poli-alfabética, baseado em transformações matriciais.”

Nesta cifra, primeiro precisamos definir uma tabela de conversão, para que nossos caracteres sejam transformados em números antes de serem cifrados. A quantidade n de caracteres que a tabela possui, irá definir em que anel iremos trabalhar, como estamos lidando com unidades inteiras, esse anel será $\mathbb{Z}_n$. Em seguida convertemos a mensagem usando a tabela escolhida.

Então, precisamos escolher a chave de criptografia, que deve ser uma matriz quadrada A de ordem $m \times m$ em que m depende do tamanho da mensagem que queremos cifrar. Essa matriz precisa possuir inversa tal que ambas possuam entradas inteiras, já que estamos trabalhando no anel $\mathbb{Z}_n$, caso contrário, não seria possível descriptografar a mensagem.

O próximo passo é quebrar nosso texto cifrado em blocos de tamanho m , e caso a mensagem não seja múltipla de m , precisamos completar a mensagem com algum caractere. Feito isso, convertemos estes blocos em vetores que denotaremos por p .

Para criptografar a mensagem temos que computar o produto $c = Ap$ em que c são os vetores que correspondem aos blocos da mensagem já criptografada. Após, é preciso encontrar as classes de equivalência correspondentes dos elementos no vetor c e, por fim, podemos usar a tabela para verificar a mensagem criptografada.

Por outro lado, dado um vetor criptografado c queremos encontrar o vetor original p , tal que $Ap = c$, isto é, precisamos resolver um sistema linear. Por exemplo, para descriptografar a mensagem, podemos calcular a inversa de A , tal que $A \cdot A^{-1} = I$, depois calcular o produto $A^{-1}c = p$ e encontrar suas correspondências na tabela.

Como para realizar o processo de criptografia utilizando cifragem de Hill, precisamos calcular uma matriz inversa. Sabe-se que os métodos utilizados para realizar tal computo exigem muitos cálculos. Um dos métodos mais baratos para conseguir obter uma matriz inversa é resolver sistemas lineares do tipo $Av = e_i$, em que v representa a coluna da matriz inversa e e_i representa a coluna correspondente da matriz identidade.

Como estamos tratando de matrizes no corpo $\mathbb{Z}_p$, surge a questão: como resolver um sistema linear no corpo $\mathbb{Z}_p$? É essa a pergunta que buscamos responder no decorrer do trabalho tanto do ponto de vista teórico quanto do computacional.

Buscamos explorar e compreender o funcionamento métodos para resolução de sistemas lineares, nos quais as componentes que definem as equações lineares pertencem ao corpo $\mathbb{Z}_p$, bem como implementá-los computacionalmente. Para isto, exploramos o algoritmo da divisão euclidiana, e definimos e caracterizaremos o conjunto $\mathbb{Z}_p$ como um corpo. Além disso, caracterizamos sistemas lineares no corpo dos números reais, e analisamos os algoritmos de Eliminação Gaussiana, Fatoração LU e Fatoração PALU para resolução de sistemas lineares em $\mathbb{Z}_p$, bem como seu respectivo custo computacional.

Como principal resultado teórico provamos o seguinte teorema:

¹Licenciada em matemática. Discente do PPGMTM UFSC. E-mail: tainasilva3012@gmail.com

²Professor do departamento de matemática UFSC-Blumenau (Orientador)

³Servidor técnico da UFSC-Blumenau (Co-orientador)

Theorem 1. *Seja A uma matriz $m \times n$ com elementos em $\mathbb{Z}_p$. Qualquer sistema de equações lineares consistente, com matriz dos coeficientes igual a A , tem exatamente $p^{n-\text{posto}(A)}$ soluções sobre $\mathbb{Z}_p$.*

Finalmente, construímos uma representação computacional de $\mathbb{Z}_p$ por meio da linguagem de programação **Julia**, utilizando uma característica de **Julia** chamada construtores, que nos permite criar um novo tipo de variável, implementamos os algoritmos para resolução de sistemas lineares em $\mathbb{Z}_p$ e utilizamos nossos algoritmos para implementar uma versão da cifra de Hill e como teste criptografamos e descriptografamos um livro de José Saramago. Todos os códigos encontram-se disponíveis em <https://github.com/TainaSilva3012/IntZp.jl>.

Referências

- [1] Jeff Bezanson et al. “Julia: A fast dynamic language for technical computing”. Em: **arXiv preprint arXiv:1209.5145** (2012).
- [2] Mariana Martins Durães Brandão. “Uma adaptação da Cifra de Hill para estudo de matrizes.” Dissertação de mestrado. Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2017.
- [3] Gene H Golub e Charles F Van Loan. **Matrix computations**. 4^o edição. Johns Hopkins University Press, 2013.
- [4] Steven J. Leon. **Algebra linear com aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 2011, p. 464.
- [5] **Manual da linguagem Julia de programação / Methods**. Acesso em: 14 fevereiro 2022. URL: <https://docs.julialang.org/en/v1/manual/methods/#Methods>.
- [6] **Manual da linguagem Julia de programação / Types**. Acesso em: 14 fevereiro 2022. URL: <https://docs.julialang.org/en/v1/manual/types/#Composite-Types>.
- [7] **Manual da linguagem Julia de programação / Constructors**. Acesso em: 15 fevereiro 2022. URL: <https://docs.julialang.org/en/v1/manual/constructors/>.
- [8] Carl D. Meyer. **Matrix analysis and Applied linear algebra**. Philadelphia: SIAM, 2000, p. 869.
- [9] David Poole. **Álgebra Linear: uma introdução moderna**. Tradução da 4^o edição norte-americana. Cengage Learning, 2017, p. 722.
- [10] Taina da Silva. **Resolução de sistemas lineares em $\mathbb{Z}_p$** . Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática), UFSC (Universidade Federal de Santa Catarina), Blumenau, Brazil. 2022.
- [11] David S. Watkins. **Fundamentals of Matrix Computations. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts**. Hoboken: Wiley, 2010, p. 644.

3 Trabalhos nível mestrado - Tipo B

Nesta seção apresentamos os resumos expandidos dos trabalhos a nível de mestrado, sendo eles algumas dissertações já defendidas e outras ainda em andamento, trabalhos estes que foram apresentados em nosso evento na forma de apresentação oral com duração de 15 minutos.

Sumário

1. Alexsandro Schneider - Polya e a Teoria da resolução de problemas aplicados à Educação Matemática nos Ensino Fundamental e Médio
2. Bruna Arielly Schulz - Álgebra de caminhos de Leavitt fortemente $\mathbb{Z}$ -graduado
3. Francisco Gabriel Klock Campos Vidal - Ações parciais do ponto de vista categórico
4. Guilherme de Martini - Existência, Unicidade e Comportamento Assintótico de Solução de um Sistema de Timoshenko com História e Lei de Cattaneo
5. Helena Günther - A função zeta, de Euler a Riemann: uma introdução à teoria analítica de números
6. Juan Carlos Oyola Ballesteros - Método de Galerkin Descontínuo para Fluxos em Meios Porosos Fraturados
7. Marco Antônio Pauleti - Método das Projeções Relaxadas com Penalização Uniformemente Convexa para Solução de Sistemas Lineares Mal-Postos em Espaços de Banach
8. Matheus Wallace Silva Carvalho - A aplicabilidade do Teorema de Reconstrução de Tannaka para álgebras de Hopf
9. Pedro Gabriel Papa Torelli - O Problema das Equações Diferenciais de Onda-Difusão Tempo-Fracionárias

POLYA E A TEORIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS APLICADOS À EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NOS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO

Alexsandro Schneider¹, Maria Inez Cardoso Gonçalves², Leonardo Koller Sacht³

Palavras-chave: Resolução de problemas. Ensino. Matemática. Polya.

1 Introdução

A presença cada vez mais frequente de problemas no contexto da sala de aula, seja da OBMEP, BNCC ou no próprio ENEM, exige que o estudante desenvolva a capacidade de resolver problemas.

Neste trabalho apresentamos a teoria de Resolução de Problemas, descrita por George Polya, no livro: A Arte de Resolver Problemas [1]. Segundo Polya, a resolução de problemas está dividida em quatro etapas: **Compreensão do Problema, Elaboração de uma Estratégia, Executando o Plano e Verificação do Resultado.**

De forma a ser colocada em prática a teoria de Resolução de Problemas, foi construído um material de apoio, no formato de uma apostila, de livre acesso e disponível para utilização de professores que assim o desejem. O estudo, bem como o desenvolvimento da apostila foram realizados na dissertação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), no polo da Universidade Federal de Santa Catarina.

2 Resultado Principal - Construindo um material didático

Esse material tem como proposta ser uma apostila para ser utilizada em sala de aula, a princípio em turmas de 5º e 6º anos, para desenvolver esses conceitos no período de transição do ensino fundamental I para o ensino fundamental II.

Apesar da presença de problemas nas séries anteriores, a formalização do processo empregado neste trabalho remete a uma certa maturidade do estudante. Assim, alunos a partir do 4º ano estão iniciando na participação da OBMEP, com a aplicação do nível A, e no 5º ano após terem esse contato já estão mais familiarizados com a OBMEP.

A aplicação desta apostila em turmas de 4º ano, caso o(a) professor(a) assim deseje, pode ser feita mesmo que de forma introdutória, mesmo não sendo o objetivo inicial desta produção. Mas a partir do 5º e 6º ano, além dessa familiarização com a OBMEP, os estudantes tem mais contato com os assuntos escolhidos para serem trabalhados nessa apostila, por esses motivos indico esse como o público alvo.

2.1 Dos assuntos abordados

Foram escolhidos os seguintes temas para serem trabalhados:

- 1) **Contagem**
- 2) **Análise de padrões**
- 3) **Geometria**
- 4) **Múltiplos e Divisores**
- 5) **Conjuntos.**

¹PROFMAT - Universidade Federal de Santa Catarina - Florianópolis - SC - alexsandroschneider@hotmail.com

²Departamento de Matemática - Universidade Federal de Santa Catarina - Florianópolis - SC - maria.inez@ufsc.br

³Departamento de Matemática - Universidade Federal de Santa Catarina - Florianópolis - SC - leonardo.sacht@ufsc.br

2.2 Da metodologia

A metodologia escolhida foi de apresentação do tema por meio de uma situação problema, em que o estudante compreenda a situação antes mesmo de ter contato com o conceito matemático envolvido, a partir desse contato o professor constrói os conceitos.

O professor deve agir como mediador para que o estudante possa, através das conclusões obtidas pela resolução do problema e pela discussão com a turma, compreender como o conceito matemático apresentado pode ser utilizado na resolução de problemas.

A discussão e apresentação das soluções desenvolvidas pelos estudantes é uma ferramenta importante para a compreensão, para que fique claro que muitas vezes, um problema pode ter vários caminhos para se chegar à solução, sem perda de corretude. Algumas vezes o professor elabora uma resolução para usar como gabarito para o problema, porém os estudantes acabam não compreendendo. Assim, uma solução desenvolvida e apresentada pelos próprios estudantes pode acabar atingindo o resto da turma com mais eficácia.

2.3 Da aplicação

A proposta para cada capítulo da apostila é de ser aplicado em três aulas, duas preferencialmente consecutivas, uma para apresentação e explicação do assunto e uma para resolução de exercícios, e a terceira para resolução e discussão das soluções encontradas pelos estudantes.

A sugestão é que o(a) professor(a) apresente o tema por meio da situação proposta na apostila, seguido de uma discussão sobre o tema. Essa discussão pode ser por meio de problemas correlatos pré selecionados, ou por meio de sugestões dos alunos, onde seriam questionados sobre situações parecidas que já vivenciaram ou que poderiam imaginar.

Após a contextualização do problema, apresentar o embasamento teórico envolvido, ou seja, mostrar a matemática que será utilizada na resolução dessa situação problema.

A terceira etapa é a resolução dos exercícios presentes na apostila. É interessante a resolução de pelo menos 3 questões, acompanhadas da resolução pelo(a) professor(a), e as questões seguintes fiquem como se fossem tarefa. É muito importante que essas questões sejam resolvidas em sala posteriormente com discussão sobre as soluções, pois devemos lembrar que um mesmo problema tem diversas formas de se abordar, então é bem comum surgirem soluções distintas, e cabe ao professor mostrar ao estudante que essas soluções, são sim possíveis e aceitáveis, se estiverem corretas, obviamente.

3 Conclusão

Esse trabalho fez a conexão entre conceitos exigidos nas diretrizes da BNCC com a obra de George Polya, tanto na visão teórica sobre seu método para resolução de problema, quanto na aplicação prática relacionada a alguns dos assuntos presentes tanto no currículo escolar quanto nas provas olímpicas.

Os cadernos do Professor e do Aluno, desenvolvidos na dissertação, podem ser utilizados por professores ou outros profissionais da educação que pretendam introduzir os conceitos presentes na resolução de problemas para estudantes, principalmente do ensino fundamental.

Referências

- [1] George Polya, **A arte de Resolver Problemas**, Interciência, Rio de Janeiro, 2006.
- [2] Alexsandro Schneider, **Polya e a teoria da resolução de problemas aplicados à educação matemática nos ensinos fundamental e médio**, Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede - PROFMAT), UFSC, Florianópolis, 2022.

Álgebra de caminhos de Leavitt fortemente $\mathbb{Z}$ -graduado

Bruna Arielly Schulz ¹, Danilo Royer ²

Palavras-chave: grafos; álgebra de caminhos de Leavitt; anel fortemente $\mathbb{Z}$ -graduado.

Considerando E um grafo dirigido e $\mathbb{K}$ um corpo, pode-se definir a álgebra de caminhos de Leavitt $L_{\mathbb{K}}(E)$. Essa álgebra foi introduzida no ano de 2005 e, desde então, vem se entrelaçando cada vez mais com propriedades de anéis graduados.

Uma álgebra de caminhos de Leavitt sempre possui uma $\mathbb{Z}$ -gradação canônica. Uma pergunta natural que surge é: será que toda álgebra de caminhos de Leavitt possui uma estrutura mais rígida, isto é, será que $L_{\mathbb{K}}(E)$ sempre é fortemente $\mathbb{Z}$ -graduado. A resposta para essa pergunta é: não necessariamente. Para que uma álgebra de caminhos de Leavitt tenha essa classificação é preciso que o grafo E tenha algumas propriedades extras. Além disso, concluir que $L_{\mathbb{K}}(E)$ é fortemente $\mathbb{Z}$ -graduado é, em geral, uma tarefa árdua. Desta forma, o objetivo desse trabalho é conseguirmos determinar quais álgebras de caminhos de Leavitt são fortemente $\mathbb{Z}$ -graduados com condições mais fracas. Dito isso, para demostramos o resultado principal, precisamos definir o que é a Condição (Y) e enunciar alguns resultados.

Definição 0.1 (Condição (Y)). *Um grafo dirigido E satisfaz a Condição (Y) se para todo $k \in \mathbb{N}$ e para todo caminho infinito p , existem um subcaminho inicial α de p e um caminho finito β tal que $r(\beta) = r(\alpha)$ e $|\beta| - |\alpha| = k$.*

Lema 0.1. *Seja E um grafo. Considere a álgebra de caminhos de Leavitt $L_{\mathbb{K}}(E)$ com a $\mathbb{Z}$ -gradação canônica. Se $L_{\mathbb{K}}(E)$ é fortemente $\mathbb{Z}$ -graduado, então*

- (i) E não possui poço;
- (ii) E é linha finita;
- (iii) E satisfaz a Condição (Y).

Proposição 0.1. *Um grafo E satisfaz a Condição (Y) se, e somente se, satisfaz a Condição (Y1).*

Proposição 0.2. *Seja E um grafo. Consideremos a álgebra de caminhos de Leavitt $L_{\mathbb{K}}(E)$ com a $\mathbb{Z}$ -gradação canônica. Se E é linha finita, não possui poço e satisfaz a Condição (Y), então $L_{\mathbb{K}}(E)$ é fortemente $\mathbb{Z}$ -graduado.*

Agora, é possível enunciar e demonstrar o teorema principal do trabalho.

Teorema 0.1. *Seja E um grafo dirigido. Considerando a álgebra de caminhos de Leavitt $L_{\mathbb{K}}(E)$ com sua $\mathbb{Z}$ -gradação canônica. As seguintes propriedades são equivalentes:*

- (i) $L_{\mathbb{K}}(E)$ é fortemente $\mathbb{Z}$ -graduado.
- (ii) E é linha finita, não possui poço e satisfaz a Condição (Y).
- (iii) E é linha finita, não possui poço e satisfaz a Condição (Y1).

Para exemplificarmos a aplicação desse teorema, consideramos o seguinte grafo E



¹Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina-Florianópolis-SC-
bruna.arielly.schulz@gmail.com

²Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina-Florianópolis-SC-
danilo.royer@ufsc.br

Esse grafo não é fortemente $\mathbb{Z}$ -graduado. Para justificar essa afirmação, no trabalho, apresentamos uma argumentação sem o Teorema 0.1. Porém, podemos concluir que com a utilização do Teorema 0.1 essa justificativa é mais direta uma vez que o grafo não satisfaz a Condição (Y).

Para a realização deste trabalho, estudamos, principalmente, o artigo [5]. Ainda, para a fundamentação do trabalho foram cruciais os artigos [1], [2] e [3] e o livro [4].

Agradecimentos

Gostaria de agradecer o professor Dr. Danilo Royer pela dedicação e pelas orientações para o desenvolvimento desse trabalho. E agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] B. EIDT; D. ROYER. “Representations of C^* -algebras of row-countable graphs and unitary equivalence”. Em: **Rocky Mountain Journal of Mathematics** 7 (2020), pp. 1295–1312.
- [2] D. GONÇALVES; D. ROYER. “Leavitt path algebras as partial skew group rings”. Em: (2012). DOI: 10.48550/ARXIV.1202.2704.
- [3] P. ARA; K. R. GOODEARL. “Leavitt path algebras of separated graphs”. Em: (2011). DOI: 10.48550/ARXIV.1004.4979.
- [4] G. ABRAMS; P. ARA; M. S. MOLINA. **Lecture Notes in Mathematics**. London: Springer, 2017, p. 2191. DOI: 10.1007/978-1-4471-7344-1.
- [5] P. LUNDSTRÖM; J. ÖINERT. “Strongly Graded Leavitt Path Algebras”. Em: **Journal of Algebra and Its Applications** 7 (2022), p. 9. DOI: 10.1142/S0219498822501419.

Ações parciais do ponto de vista categórico

Francisco Gabriel Klock Campos Vidal ¹, Mykola Khrypchenko ²

Palavras Chave: ações parciais de grupo, globalização, categorias

Dados G um grupo e X um conjunto, uma *ação parcial*, conceito introduzido no contexto de álgebras de operadores por Exel em [4], de G em X é uma forma mais fraca de uma ação de grupo no sentido usual, em que os elementos do grupo não agem necessariamente no conjunto todo, mas sim em um subconjunto do mesmo, a depender do elemento.

Um exemplo disto se dá a partir de uma ação global α de G em X ao restringi-la a um subconjunto S de X , de modo que obtemos uma ação parcial de G em S , em que cada elemento de G age apenas nos elementos de S que são levados em S por esta ação, a chamada *restrição*, ou *ação parcial induzida*, de α em S .

Este exemplo consiste, de fato, de todos os exemplos de ações parciais de G em conjuntos, pois, dada uma ação parcial β de G em um conjunto S , é possível construir uma ação global α de G em um conjunto X contendo S cuja restrição a S é a ação parcial β . Uma tal ação global é dita uma *globalização* para β .

Mais ainda, se considerarmos as categorias de ações parciais e de ações globais, em que a segunda pode ser vista como uma subcategoria da primeira, esta construção pode ser feita de modo que a inclusão de S em X é uma *reflexão* [3] de β na categoria de ações globais, de modo que α satisfaz também uma certa condição de minimalidade. Uma globalização para β satisfazendo esta propriedade é dita uma *globalização universal*, ou *ação envolvente* [2], de β .

Relembrando que há uma correspondência entre ações globais de G em X e certas funções de G para o conjunto de funções de X para X , há, de fato, uma correspondência similar para ações parciais de G em X . Esta correspondência é dada entre as ações parciais de G em X e certas funções de G para o conjunto de classes de isomorfismo de *morfismos parciais* de X para X , como vista em [5].

Um *morfismo parcial* entre dois conjuntos X e Y consiste de uma tripla (X', f, g) , em que X' é um conjunto, f é uma função injetiva de X' para X e g é uma função qualquer de X' para Y . Ou seja, a menos de uma identificação de X' com sua imagem em X por f , um morfismo parcial entre X e Y encapsula os dados de uma função de um subconjunto de X para Y .

Este conceito pode ser descrito de forma mais geral em uma categoria $\mathbf{C}$ qualquer, de modo que um morfismo parcial entre dois objetos X e Y de $\mathbf{C}$ consiste de uma tripla (X', f, g) em que X' é um objeto de $\mathbf{C}$, f é um monomorfismo de X' para X e g é um morfismo qualquer de X' para Y . Desta forma, com base na correspondência entre ações parciais e certas funções do grupo para o conjunto das classes de isomorfismo de morfismos parciais de um conjunto para ele mesmo, é possível generalizar o conceito de ação parcial de grupo para objetos em categorias arbitrárias.

O objetivo atual deste trabalho é estudar a questão da globalização destas ações parciais em categorias, procurando encontrar condições necessárias e suficientes, envolvendo colimites, co-produtos, coequalizadores e pullbacks, para que uma dada ação parcial possua uma globalização universal, e estudar, com isto, a globalizabilidade de ações parciais neste sentido em algumas categorias específicas.

O estudo inicial para este trabalho seguiu pelo estudo do artigo [5], cuja primeira seção introduz ações parciais em conjuntos e as caracteriza em termos de morfismos parciais de duas formas, incluindo a mencionada neste resumo.

O artigo [1] possui uma construção explícita para a globalização universal de ações parciais em espaços topológicos, a qual serviu de referência para a construção da mesma para ações parciais em conjuntos neste trabalho, que, por sua vez, motivou a construção do colimite e dos coequalizadores que compõe as condições de globalização encontradas.

¹Bacharel em Matemática. Universidade Federal de Santa Catarina. Email: francisco_gabriel25@hotmail.com

²Doutor em Matemática. Departamento de Matemática. Universidade Federal de Santa Catarina. Email: nskhrypchenko@gmail.com

Os artigos [6] e [7], que construíram globalizações universais para ações parciais de monoides em categorias monoidais, mas em uma generalização para ações parciais de monoides em um sentido diferente da deste trabalho, utilizando monoides dentro da categoria monoidal, auxiliaram nas ideias para a demonstração dos resultados deste trabalho.

Neste trabalho provamos que:

- (1) A restrição de uma ação global a um objeto via um monomorfismo, construída neste contexto categórico, é de fato uma ação parcial.
- (2) Dada uma ação parcial β de um grupo G em um objeto numa categoria $\mathbf{C}$, assumindo a existência do colimite de um funtor associado a β , ou, mais fortemente, assumindo a existência de certos dois coprodutos e um coequalizador para dois morfismos associados a β entre estes coprodutos, temos que β é globalizável se, e somente se certos diagramas são diagramas pullback.
- (3) Dada uma ação parcial β de um grupo G em um objeto numa categoria $\mathbf{C}$, e assumindo a existência de certos dois coprodutos, temos que β é globalizável se, e somente se, certos diagramas são diagramas pullback e existe um coequalizador para dois morfismos associados a β entre estes coprodutos, mas vistos como morfismos na categoria de ações globais de G em objetos de $\mathbf{C}$, ao colocar certas estruturas de ação global nos coprodutos.

Agradecimentos

Agradeço à FAPESC pelo auxílio financeiro por meio da bolsa de mestrado, que permite a concepção deste trabalho.

Referências

- [1] Fernando Abadie. “Enveloping actions and Takai duality for partial actions.” English. Em: **J. Funct. Anal.** 197.1 (2003), pp. 14–67. ISSN: 0022-1236. DOI: 10.1016/S0022-1236(02)00032-0.
- [2] Fernando Abadie. “Sobre Ações Parciais, Fibrados de Fell, e Grupóides”. Tese de doutorado. São Paulo, Brazil: Universidade de São Paulo, set. de 1999.
- [3] Jiří Adámek, Horst Herrlich e George E. Strecker. **Abstract and concrete categories. The joy of cats**. English. New York etc.: John Wiley & Sons, Inc., 1990. ISBN: 0-471-60922-6.
- [4] Ruy Exel. “Circle actions on C^* -algebras, partial automorphisms, and a generalized Pimsner-Voiculescu exact sequence”. English. Em: **J. Funct. Anal.** 122.2 (1994), pp. 361–401. ISSN: 0022-1236. DOI: 10.1006/jfan.1994.1073.
- [5] Jiawei Hu e Joost Vercruysse. “Geometrically partial actions”. English. Em: **Trans. Am. Math. Soc.** 373.6 (2020), pp. 4085–4143. ISSN: 0002-9947. DOI: 10.1090/tran/8058.
- [6] Paolo Saracco e Joost Vercruysse. “Globalization for geometric partial comodules”. English. Em: **J. Algebra** 602 (2022), pp. 37–59. ISSN: 0021-8693. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2022.03.013.
- [7] Paolo Saracco e Joost Vercruysse. “On the globalization of geometric partial (co)modules in the categories of topological spaces and algebras”. English. Em: **Semigroup Forum** 105.2 (2022), pp. 534–550. ISSN: 0037-1912. DOI: 10.1007/s00233-022-10269-3.

Existência, Unicidade e Comportamento Assintótico de Solução de um Sistema de Timoshenko com História e Lei de Cattaneo

Guilherme de Martini¹, Michele de Oliveira Alves², Marcio Antonio Jorge da Silva³

Palavras-chave: Sistema de Timoshenko. Lei de Cattaneo. Semigrupos de Operadores Lineares.

1 Introdução

O sistema de Timoshenko é um sistema de equações diferenciais parciais que retrata a vibração de uma viga considerando o deslocamento transversal e o ângulo de rotação. A primeira versão deste sistema, apresentada pelo engenheiro Stephen Prokofievich Timoshenko em [5], é dada por

$$\begin{aligned}\rho A \varphi_{tt} &= S_x, \\ \rho I \psi_{tt} &= M_x - S,\end{aligned}\tag{1}$$

onde $\varphi = \varphi(x, t)$ e $\psi = \psi(x, t)$ denotam, respectivamente, o deslocamento vertical e o ângulo de rotação da viga na posição x e no instante t .

Neste trabalho apresentaremos um estudo detalhado de uma versão do sistema (publicado em [4]) que leva em consideração uma lei constitutiva termoviscoelástica para o momento fletor M e uma lei constitutiva elástica para a força de cisalhamento S . Além disso, consideraremos uma equação de propagação de calor e a lei térmica de Cattaneo para descrever a relação entre o fluxo de calor. Mais precisamente, o sistema a ser estudado é descrito por

$$\begin{aligned}\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x &= 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - \tilde{b} \psi_{xx} - \int_0^\infty g(s) \eta_{xx}(s) ds + k(\varphi_x + \psi) + \delta \theta_x &= 0, \\ \rho_3 \theta_t + q_x + \delta \psi_{xt} &= 0, \\ \tau q_t + \beta q + \theta_x &= 0, \\ \eta_t + \eta_s - \psi_t &= 0,\end{aligned}\tag{2}$$

onde $\theta = \theta(x, t)$ representa a variação de temperatura, $q = q(x, t)$ designa o fluxo de calor, g é conhecida como núcleo de memória, $\eta = \eta(x, t, s)$ é resultado de uma mudança de variável conveniente e, por fim, $\rho_1, \rho_2, \rho_3, k, \tilde{b}, \delta, \beta$ são constantes positivas.

Ressalta-se que o objetivo inicial é apresentar um estudo detalhado dos resultados relativos ao sistema de Timoshenko com história e lei térmica de Cattaneo apresentado em [4]. A posteriori, serão exibidas adaptações das ideias apresentadas em [2] que permitem caracterizar o comportamento assintótico do problema.

2 Desenvolvimento

O ponto de partida do trabalho será escrever o sistema em um problema de Cauchy Abstrato, isto é, da forma

$$\begin{aligned}U_t &= AU, \quad t > 0 \\ U(0) &= U_0.\end{aligned}\tag{3}$$

Seguidamente, respaldados pelo Teorema de Lummer Phillips, o qual fornece uma caracterização de geradores infinitesimais de C_0 -semigrupos de contração, e o Teorema 2.2, conclui-se a existência e unicidade de solução do sistema de valor inicial e de fronteira.

¹Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - e-mail: guilhermedemartini@live.com

²Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, Paraná - e-mail: michelealves@uel.br

³Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, Paraná - e-mail: marcioajs@uel.br

Teorema 2.1. (Lumner Phillips) *Seja A um operador linear com domínio denso em $\mathcal{H}$*

- (i) *Se A é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que $\text{Im}(\lambda_0 I - A) = \mathcal{H}$, então A é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contrações.*
- (ii) *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contrações sobre $\mathcal{H}$, então $\text{Im}(\lambda I - A) = \mathcal{H}$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo.*

Teorema 2.2. *Seja A um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $T(t) := e^{At}$ em $\mathcal{H}$. Se $U_0 \in D(A)$, então o problema de Cauchy abstrato (3) possui uma única solução U em $D(A)$ dada por*

$$U(t) = T(t)U_0 := e^{At}U_0, \quad \forall t \geq 0,$$

tal que

$$U \in C([0, +\infty), D(A)) \cap C^1([0, +\infty), \mathcal{H}).$$

Em um segundo momento, ainda apoiados na teoria de semigrupos lineares, investigaremos condições necessárias e suficientes para que a solução do problema possua decaimento exponencial. Para tanto, consideraremos o resultado apresentado por Prüss, a saber,

Teorema 2.3. (Prüss) *Seja $T(t) = e^{At}$ um C_0 -semigrupo de contrações em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então, $T(t)$ exponencialmente estável se, e somente se, as seguintes condições se verificam*

- (i) $i\mathbb{R} := \{i\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \varrho(A)$,
- (ii) $\limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty$.

Nos casos em que o decaimento exponencial da solução não é obtido, o Teorema de Borichev & Tomilov permitirá concluir que a solução decai em uma taxa polinomial.

Teorema 2.4. (Borichev & Tomilov) *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo limitado em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ com gerador infinitesimal A tal que $i\mathbb{R} \subset \varrho(A)$. Então, para alguma constante fixada $\alpha > 0$ as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $\|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(|\lambda|^\alpha), \quad \lambda \rightarrow \infty$.
- (ii) $\|T(t)A^{-1}u\|_{\mathcal{H}} = o(t^{-1/\alpha}), \quad t \rightarrow \infty, u \in \mathcal{H}$.

3 Agradecimentos

Agradecimentos à CAPES pelo auxílio financeiro durante o curso de mestrado, período em que este trabalho foi desenvolvido.

Referências

- [1] A. BORICHEV e Y. TOMILOV. “Optimal polynomial decay of functions and operator semi-groups”. Em: **Mathematische Annalen** 347.2 (2010), pp. 455–478.
- [2] L. H. FATORI; R. N. MONTEIRO e H. D. F. SARE. “The Timoshenko system with history and Cattaneo law”. Em: **Applied Mathematics and Computation** 228 (2014), pp. 128–140.
- [3] J. PRÜSS. “On the spectrum of C_0 -semigroups”. Em: **Transactions of the American Mathematical Society** 284.2 (1984), pp. 847–857.
- [4] H. D. F. SARE e R. RACKE. “On the stability of damped Timoshenko systems: Cattaneo versus Fourier law”. Em: **Archive for Rational Mechanics and Analysis** 194.1 (2009), pp. 221–251.
- [5] S. P. TIMOSHENKO. “On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars”. Em: **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science** 41.245 (1921), pp. 744–746.

A função zeta, de Euler a Riemann: uma introdução à teoria analítica de números

Ma. Helena Günther¹, Dr. Eliezer Batista²

Palavras-chave: Função zeta. Funções analíticas. Teoria analítica de números.

“A função zeta, de Euler a Riemann: uma introdução à teoria analítica de números” pretende abordar, de um ponto de vista elementar, as origens e a evolução da teoria analítica de números. Este trabalho foi elaborado como dissertação do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

O texto é destinado a um público amplo, porém foi escrito tendo em mente especialmente os leitores graduandos e graduados em Matemática; assim, objetiva trabalhar os elementos da função zeta de forma acessível e, sempre que possível, autocontida.

Para isto, primeiramente é analisado o surgimento da função zeta (devido a Leonhard Euler), enfatizando principalmente a sua relação com números primos. Em seguida é discutida sua extensão como função analítica em todo o plano complexo (exceto por seu polo em $z = 1$).

Primeiramente definimos a função zeta no conjunto dos reais. Apresentamos também a fórmula do produto de Euler.

Definição 0.1. A função zeta de Euler é definida como $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, para todo $s \in \mathbb{R}$ tal que $s > 1$.

Em 1737, no seu artigo “Variae observationes circa series infinitas” [3], Euler demonstrou que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$. A sua demonstração no entanto não era rigorosa, especialmente por não fazer diferença entre os valores de s para os quais a soma e o produto acima convergem ou divergem.

Teorema 0.2 (Fórmula do produto de Euler). Para $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$, temos que $\zeta(s) = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}. \quad (1)$$

Posteriormente, é definida uma extensão analítica da função zeta no plano complexo (exceto para seu polo, em $s = 1$) e para isso o trabalho inclui também um estudo da função $\Gamma(s)$.

Abaixo seguem as definições e resultados mais relevantes, e que serão abordados na apresentação.

A integral $\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{x-1} dt$ foi estudada por Euler entre 1729 e 1730. Em 1809, esta integral recebeu de Adrien-Marie Legendre o nome de função gama (definida para $x > 0$, onde a integral acima converge) e o símbolo Γ que a caracterizam. [4] Alternativamente, é possível definí-la da forma abaixo.

Definição 0.3. A função gama é definida como $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ para $x \in (0, \infty)$.

Corolário 0.1. Para $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Proposição 0.4. A função gama tem extensão analítica no semiplano $\Re(s) > 0$, e sua extensão analítica também é dada pela fórmula integral

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt. \quad (2)$$

¹Mestra em Matemática pela UFSC – Florianópolis, SC – helenamtm@gmail.com

²Departamento de Matemática, UFSC – Florianópolis, SC – e.batista@ufsc.br

Proposição 0.5. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge para todo s com $\operatorname{Re}(s) > 1$ e a função $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ é holomorfa nesse semiplano.

Teorema 0.6. A função zeta tem continuação meromorfa em todo o plano complexo, tendo como única singularidade um polo simples em $s = 1$.

É um tanto surpreendente que a teoria de números tenha tido que confiar na análise para seu desenvolvimento, assim como surpreende que os números primos, tão fundamentais na aritmética, tenham uma distribuição tão imprevisível e ainda não plenamente compreendida. A busca ainda não concluída por uma demonstração da validade da Hipótese de Riemann é um grande estímulo para o estudo da função zeta. No entanto, encontrar um texto acessível para iniciar este estudo pode se mostrar um desafio. Dessa forma, buscamos de maneira sucinta e direta compilar os resultados necessários à construção da continuação analítica de zeta, visando um estudo autocontido e detalhado, tendo como público alvo graduandos e pós-graduandos em Matemática.

Agradecimentos

Ao professor Eliezer Batista, por ter me guiado enquanto orientador deste trabalho e por se fazer presente em muitos outros momentos da minha trajetória acadêmica. Aos professores Marianna Ravara Vago, Eduardo Tengan e Giuliano Boava, cujas contribuições como banca da defesa foram valiosas para o texto final. Ao PROFMAT-UFSC, que possibilitou a sua realização.

Referências

- [1] William Dunham. **Euler: the master of us all**. The Dolciani mathematical expositions no. 22. Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1999.
- [2] Harold M. Edwards. **Riemann's zeta function**. Dover ed. Mineola, NY: Dover Publications, 2001.
- [3] Leonard Euler. "Several Remarks on Infinite Series (Variae observationes circa series infinitas)". Trad. por Viader, Pelegrí, Bibiloni, Lluís e Viader Jr., Pelegrí. Em: **Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae** 9 (1744). Acessado em 20/08/2018., pp. 160–188.
- [4] Julian Havil. **Gamma: exploring Euler's constant**. Princeton: Princeton University Press, 2003.
- [5] Bernhard Riemann. "on the numbers of primes less than a given quantity (Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse)". Trad. por David R. Wilkins. Em: **Monatsberichte der Berliner Akademie** (nov. de 1859). Acessado em 02/06/2018, <http://www.claymath.org/sites/default/files/ezeta.pdf>.
- [6] Elias M. Stein e Rami Shakarchi. **Complex analysis**. Princeton lectures in analysis 2. Princeton, N.J: Princeton University Press, 2003.
- [7] Robert M. Young. **Excursions in calculus: an interplay of the continuous and the discrete**. The Dolciani mathematical expositions no. 13. Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1992.

Método de Galerkin Descontínuo para Fluxos em Meios Porosos Fraturados

Juan Carlos Oyola Ballesteros¹, Igor Mozolevski², Luciane Assmann Schuh³

Palavras-chave: fluxo, fratura, domínio, método de Galerkin Descontínuo.

O estudo de métodos computacionais que permitem a simulação de fenômenos de fluxo, assume uma importância cada dia maior como instrumento capaz de prover soluções para problemas ambientais e energéticos, essencial nas atividades humanas, como a gestão de recursos hídricos, rastreamento de migração de petróleo, isolamento de rejeitos radioativos e contaminação de lençóis freáticos. Deste modo, a modelagem de fluxos em meios porosos fraturados, tornou-se uma ferramenta muito importante nas últimas décadas, conforme [1]. Nessas aplicações, o fluxo é fortemente influenciado pela presença de fraturas, que podem agir como caminhos preferenciais, fazendo com que o fluido dirija-se para a fratura e em seguida flui ao longo da fratura (quando sua permeabilidade é maior que a do meio circundante).

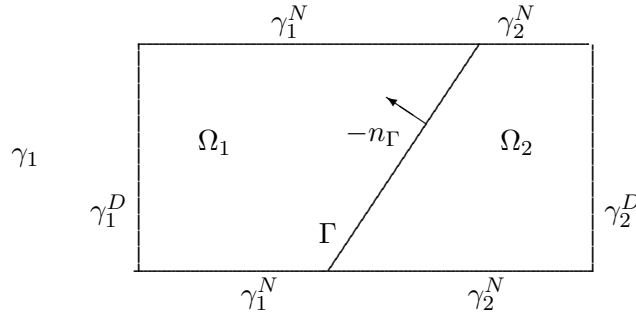


Figura 1: Os subdomínios Ω_1 e Ω_2 separados pela fratura Γ .

Por outro lado, o fluxo no meio poroso $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, como na Figura 1, é governado pela lei de Darcy e uma versão reduzida adequada desta lei é formulada na superfície que modela a fratura (Γ). Condições de acoplamento fisicamente consistentes são adicionadas para contabilizar a troca de fluido entre a fratura e o meio poroso, [5]. Deste modo, uma equação de fluxo é obtida ao longo da interface que é acoplada com equações de fluxo nos subdomínios vizinhos. Este trabalho está baseado no modelo apresentado no artigo [5], no qual trata o modelo de fratura única com alta e baixa permeabilidade em um meio poroso, que fornece o problema elíptico que é dado pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 -\nabla \cdot (K_i(x, y) \nabla p_i) &= f_i, & \text{em } \Omega_i \quad i = 1, 2 \\
 p_i &= g_D^i, & \text{em } \gamma_i^D \quad i = 1, 2 \\
 \nabla p_i \cdot \vec{n} &= g_N^i, & \text{em } \gamma_i^N \quad i = 1, 2 \\
 -\nabla_\tau \cdot (K_\Gamma^\tau l_\Gamma \nabla_\tau p_\Gamma) &= f_\Gamma + [[-K \nabla p \cdot n_\Gamma]], & \text{em } \Gamma \\
 p_\Gamma &= g_\Gamma, & \text{em } \partial \Gamma \\
 -2\{K \nabla p\} \cdot n_\Gamma &= \beta_\Gamma(p_1 - p_2), & \text{em } \Gamma \\
 -[[K \nabla p \cdot n_\Gamma]] &= \alpha_\Gamma(\{p\} - p_\Gamma), & \text{em } \Gamma.
 \end{aligned} \tag{1}$$

¹Programa de Pos - Graduação Matemática Pura e Aplicada-Universidade Federal de Santa Catarina - Florianópolis- SC - jcoyolaba@unal.edu.co

²Departamento de Matemática - Universidade Federal de Santa Catarina - Florianópolis - SC - igor.e.mozolevski@gmail.com

³Departamento de Matemática - Universidade Federal de Santa Catarina - Florianópolis- SC - Luciane.schuh@ufsc.br

Quando confrontado com a tarefa de resolver uma equação diferencial parcial computacionalmente, percebe-se rapidamente que existe um grande número de métodos diferentes para fazer isso. Considerando a natureza descontínua da solução na fratura, em relação ao domínio, as condições de acoplamento podem ser formuladas naturalmente usando operadores de salto e média, assim, os métodos de Galerkin descontínuo são ferramentas próprias para lidar, de forma eficiente, com nosso modelo diferencial. Os Métodos de Galerkin descontínuo em elementos finitos (em inglês, Discontinuous Galerkin Finite Element Method ou DGFEM) foram introduzidos pela primeira vez no início dos anos 1970 (ver, por exemplo [2, 3, 6]) como uma técnica para resolver equações diferenciais parciais numericamente.

O objetivo da dissertação de mestrado foi empregar o Método Galerkin descontínuo (DG) tanto no domínio quanto na fratura, para tratar numericamente o modelo de fratura única para alta e baixa permeabilidade (1), com uma correspondência na malha computacional fratura-domínio. Para fazer isso o Método de Galerkin Descontínuo fornece um problema variacional de nossa EDP em questão. Assim, garantimos existência e unicidade da solução variacional e obtemos estimativas para o erro que garante a convergência da solução variacional para a solução exata. Por fim geramos um olhar matricial do problema variacional, o que vai nos guiar para a implementação computacional. Os algoritmos, métodos e implementações Matlab da dissertação, foram desenvolvidos com base [4].

Referências

- [1] Paola F ANTONIETTI et al. “Discontinuous Galerkin approximation of flows in fractured porous media”. Em: **MOX-Report** 22 (2016).
- [2] G. BAKER. “Finite element methods for elliptic equations using nonconforming elements”. Em: **Mathematics of Computation** 31.137 (1977), pp. 45–59.
- [3] T. DOUGLAS J.; DUPONT. “Interior penalty procedures for elliptic and parabolic Galerkin methods”. Em: **Computing methods in applied sciences**. Springer, 1976, pp. 207–216.
- [4] T. HESTHAVEN J.; Warburton. **Nodal discontinuous Galerkin methods: algorithms, analysis, and applications**. Springer Science & Business Media, 2007.
- [5] Vincent Martin, Jérôme Jaffré e Jean E Roberts. “Modeling fractures and barriers as interfaces for flow in porous media”. Em: **SIAM Journal on Scientific Computing** 26.5 (2005), pp. 1667–1691.
- [6] TR. REED W.; HILL. **Triangular mesh methods for the neutron transport equation**. Rel. técn. Los Alamos Scientific Lab., N. Mex.(USA), 1973.

Método das Projeções Relaxadas com Penalização Uniformemente Convexa para Solução de Sistemas Lineares Mal-Postos em Espaços de Banach

Marco Pauleti¹, Fábio Margotti²

Palavras-chave: Problemas mal-postos. Métodos de regularização. Otimização convexa. Distâncias de Bregman. Geometria dos espaços de Banach.

A teoria dos problemas inversos diz respeito à reconstrução da causa de um dado fenômeno por meio da observação dos efeitos por ele produzidos. Do ponto de vista matemático, um problema inverso é formulado através de uma equação da forma $\mathcal{F}(x) = y$. O chamado operador direto $\mathcal{F}: \mathcal{D}(\mathcal{F}) \subseteq X \rightarrow Y$ modela o problema em análise e atua entre espaços normados X e Y adequados. O vetor x é a causa do fenômeno, enquanto y representa o correspondente efeito observado. Resolver um problema inverso significa encontrar uma aproximação para x (a solução) por meio do conhecimento parcial do vetor y (os dados).

A principal dificuldade na resolução de problemas inversos reside no fato de que estes frequentemente são mal-postos e sofrem com a falta de estabilidade. Portanto, uma pequena perturbação dos dados pode arruinar completamente a reconstrução da solução do problema. Métodos numéricos capazes de resolver problemas que não possuem estabilidade são os chamados métodos de regularização.

Este trabalho dedicou-se ao estudo de sistemas lineares $\mathcal{A}x = y$ mal-postos definidos em espaços de Banach, onde analisamos um método de regularização do tipo Tikhonov iterado. Tal método baseia-se em sucessivas minimizações de funcionais T_{λ_k} dados por:

$$T_{\lambda_k}(x) = \frac{\lambda_k}{r} \|\mathcal{A}x - y^\delta\|^r + \mathcal{R}^{(k)}(x) \quad (1)$$

onde $r > 1$, $\lambda_k > 0$ e $\mathcal{R}^{(k)}$ é um funcional convexo não-negativo. O parâmetro λ_k é chamado de parâmetro de regularização e $\mathcal{R}^{(k)}$ é denominado termo de penalização. É necessário adotar alguma estratégia para escolher λ_k e $\mathcal{R}^{(k)}$ em cada iteração.

Grosso modo, definiremos um algoritmo iterativo que gera uma sequência (x_k) onde x_{k+1} é obtido a partir de x_k da seguinte forma: Seja $\Omega = \{x \in X \mid \mathcal{A}x = y\}$ o conjunto de todas as soluções e suponha que $x_k \notin \Omega$. Tome um conjunto S (não-vazio, convexo e fechado) que separa o ponto x_k do conjunto Ω . Em seguida, x_{k+1} é definido como a projeção de x_k em S . A iteração continua até que um determinado critério de parada seja satisfeito. Mostraremos que para uma escolha de $\mu > 0$ adequada, o conjunto de nível $S_\mu = \{x \in X \mid \|\mathcal{A}x - y^\delta\| \leq \mu\}$ realiza a separação desejada. Ao invés de explicitamente determinarmos o valor de μ , permitiremos que em cada iteração este parâmetro possa ser escolhido dentro de um intervalo, gerando assim o método das projeções relaxadas.

Quando X é um espaço de Hilbert, podemos tomar $\mathcal{R}^{(k)}(x) = \frac{1}{2}\|x - x_k\|^2$. Assim, o problema de projetar x_k sobre S_μ pode ser entendido como o seguinte problema de minimização:

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}) \quad & \underset{x}{\text{minimizar:}} \quad \mathcal{R}^{(k)}(x) \\ & \text{sujeito a:} \quad x \in S_\mu \end{aligned} \quad (2)$$

Discutiremos motivos para os quais a escolha $\mathcal{R}^{(k)}(x) = \frac{1}{2}\|x - x_k\|^2$ pode não ser adequada em um espaço de Banach onde a norma não provém de um produto interno, e como esta dificuldade pode ser contornada utilizando a chamada distância de Bregman. Ainda, mostraremos que as condições de KKT de (2) conecta o problema da projeção com o problema de minimização do funcional T_{λ_k} em (1).

¹Departamento de Matemática. UFSC – Florianópolis/SC. marco.pauleti@gmail.com

²Departamento de Matemática. UFSC – Florianópolis/SC. fabio.margotti@ufsc.br

Discutiremos também aspectos básicos da geometria de espaços de Banach, como o operador de dualidade e o Teorema de Asplund. Por fim, apresentaremos as propriedades de convergência, estabilidade e regularização das soluções computadas pelo método proposto.

Agradecimentos

O autor Marco Pauleti agradece a CAPES pela bolsa de estudos concedida.

Referências

- [1] Heinz H Bauschke e Patrick L Combettes. **Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces**. Vol. 408. Springer, 2011.
- [2] Jonathan M Borwein e Jon D Vanderwerff. **Convex Functions: Constructions, Characterizations and Counterexamples**. Vol. 172. Cambridge University Press Cambridge, 2010.
- [3] Ioana Ciorănescu. **Geometry of Banach Spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems**. Vol. 62. Springer Science & Business Media, 1990.
- [4] Francis Clarke. **Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control**. Vol. 264. Springer Science & Business Media, 2013.
- [5] Ivar Ekeland e Roger Témam. **Convex Analysis and Variational Problems**. SIAM, 1999.
- [6] Heinz Werner Engl, Martin Hanke e Andreas Neubauer. **Regularization of Inverse Problems**. Vol. 375. Springer Science & Business Media, 1996.
- [7] Srinivasan Kesavan. **Functional Analysis**. Vol. 52. Springer, 2009.
- [8] Andreas Kirsch. **An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems**. 3ª ed. Vol. 120. Springer Nature, 2021.
- [9] Majela Machado, Fábio Margotti e Antonio Leitão. “On nonstationary iterated Tikhonov methods for ill-posed equations in Banach spaces”. Em: **New Trends in Parameter Identification for Mathematical Models**. Springer, 2018, pp. 175–193.
- [10] Majela Machado, Fábio Margotti e Antonio Leitão. “On the choice of Lagrange multipliers in the iterated Tikhonov method for linear ill-posed equations in Banach spaces”. Em: **Inverse Problems in Science and Engineering** 28.6 (2020), pp. 796–826.
- [11] Andreas Rieder. **Keine Probleme mit inversen Problemen: eine Einführung in ihre stabile Lösung**. Springer-Verlag, 2003.
- [12] Thomas Schuster et al. **Regularization Methods in Banach Spaces**. de Gruyter, 2012.
- [13] Constantin Zălinescu. **Convex Analysis in General Vector Spaces**. World scientific, 2002.

A aplicabilidade do Teorema de Reconstrução de Tannaka para álgebras de Hopf

Matheus Wallace Silva Carvalho¹, Eliezer Batista²

Palavras-chave: teoria de categorias, categorias monoidais, teorema de Reconstrução de Tannaka, álgebras de Hopf.

Uma das aplicações de teoria de categorias, objetivo do presente trabalho, é apresentar os fundamentos de uma generalização, adequada para álgebras de Hopf, da teoria clássica de Categorias Tannakianas para grupos algébricos afins [3]. Essa, teoria na verdade, substitui o clássico Teorema de Dualidade de Tannaka-Krein, demonstrado pelos matemáticos Tadao Tannaka em [4] e Mark Grigorievich Krein em [2], no século passado, para o caso de grupos.

Para chegarmos no *gran finale*, alguns resultados acerca de categorias, funtores e transformações naturais monoidais, serão essenciais no decorrer do trabalho. Utilizaremos também, numa visão categórica, objetos duais, álgebras, coálgebras, biálgebras e álgebras de Hopf.

De forma concisa, a teoria de Tannaka-Krein pode ser formulada (e generalizada para grupos algébricos afim em um corpo arbitrário, como pode ser visto em [1]) como sendo o processo de reconstruir um grupo a partir da coleção de todas as suas representações de dimensão finita. Para esta reconstrução, temos que levar em consideração algumas “estruturas” que a categoria de todas as representações possui. Sendo elas: o produto tensorial de duas representações, a representação trivial no corpo base, e o dual de uma representação, que esta ligado com a inversão no grupo.

Sendo assim, teremos como objetivo, estudar o Teorema da Reconstrução de Tannaka, visto em [3], e exemplificá-lo com o *coend* do funtor esquecimento $\omega : \text{Rep}(G)^{(f)} \rightarrow \text{Vect}_k^{(f)}$, sendo $\text{Rep}(G)^{(f)}$ a categoria das representações do grupo G sobre o corpo k fixado de dimensão finita e $\text{Vect}_k^{(f)}$ a categoria dos espaços vetoriais de dimensão finita. Mas afinal, o que são *coends*? De forma branda, são objetos iniciais de uma transformação dinatural que tem como imagem um funtor constante (*wedge*).

A ideia principal é definirmos a categoria Tan a qual possui como objetos $(\mathcal{C}, \omega)$ sendo $\mathcal{C}$ uma categoria k linear abeliana e $\omega : \mathcal{C} \rightarrow \text{Vect}^{(f)}$ um funtor aditivo fiel e exato. Nela, seus objetos se relacionam com morfismos que são classes $[F, \zeta] : (\mathcal{C}, \omega) \rightarrow (\mathcal{D}, \gamma)$ tais que $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é um funtor e $\zeta : \omega \cong \gamma F$ é um isomorfismo natural. Denotando $\text{coend}(\mathcal{C}, \omega)$ como o *coend* do bifuntor $\omega(_)^* \otimes \omega(_) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow \text{Vect}^{(f)}$. Por estarmos trabalhando em $\text{Vect}_k^{(f)}$, o $\text{coend}(\omega)$ sempre existirá, pois produtos tensoriais preservam colimites.

Toda construção realizada nesse trabalho terá como resultado que, para todo objeto $(\mathcal{C}, \omega) \in \text{Tan}$, o $\text{coend}(\omega)$ possui “naturalmente” uma estrutura de coálgebra. Ao adicionarmos uma estrutura monoidal à categoria $\mathcal{C}$ e supondo que o funtor ω é estritamente monoidal, obtemos que o $\text{coend}(\omega)$ é uma biálgebra. Agora, se $\mathcal{C}$ é uma categoria monoidal rígida e ω um funtor monoidal estrito, temos que o $\text{coend}(\omega)$ é álgebra de Hopf.

Agradecimentos

Agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pela bolsa de mestrado, que foi fundamental na realização deste trabalho.

Referências

- [1] Pierre Deligne e James S Milne. “Tannakian categories”. Em: **Hodge cycles, motives, and Shimura varieties**. Springer, 1982, pp. 101–228.

¹Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada - Universidade Federal de Santa Catarina - Florianópolis- SC - matheuswsc@hotmail.com

²Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada - Universidade Federal de Santa Catarina - Florianópolis- SC - eliezer1968@gmail.com

- [2] M Krein. “A principle of duality for bicomact groups and quadratic block algebras”. Em: **Doklady Akad. Nauk SSSR (NS)**. Vol. 69. 1949, pp. 725–728.
- [3] Peter Schauenburg. **Tannaka duality for arbitrary Hopf algebras**. 66. R. Fischer, 1992.
- [4] Tadao Tannaka. “Über den Dualitätssatz der nichtkommutativen topologischen Gruppen”. Em: **Tohoku Mathematical Journal, First Series** 45 (1939), pp. 1–12.

O Problema das Equações Diferenciais de Onda-Difusão Tempo-Fracionárias

Pedro Gabriel Papa Torelli¹, Cícero Lopes Frota²

Palavras-chave: cálculo fracionário, equação de onda-difusão, equações diferenciais fracionárias.

O presente trabalho tem como objetivo principal realizar um estudo sobre um problema de valores iniciais e de fronteira (PVIF) para a equação diferencial tempo-fracionária de onda-difusão de ordem $0 < \alpha \leq 2$, a saber,

$${}^C D_t^\alpha u - K u_{xx} = 0, \quad (1)$$

onde ${}^C D_t^\alpha$ representa a derivada de Caputo de ordem α na variável t .

O estudo em questão tem como foco evidenciar o processo de resolução do PVIF considerado ao utilizar-se do método de separação de variáveis juntamente com a transformada de Laplace. Em meio a este, temos como propósito a compreensão de como o processo de resolução impacta na escolha de dados iniciais apropriados e a análise do comportamento de funções que naturalmente surgem em meio a aplicação da transformada de Laplace, a saber, as funções de Mittag-Leffler. Além do mais, naturais comparações com o caso inteiro também são enfatizadas.

Assim como em [3] e [6], consideramos o operador derivada de Caputo de ordem α na variável t , definido pontualmente por

$$({}^C D_t^\alpha u)(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_0^t (t - s)^{n - \alpha - 1} \left[u(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{(k)}(0)}{k!} s^k \right] ds, \quad (2)$$

onde Γ representa a função gama e $n = [\alpha] + 1$ se $\alpha \notin \mathbb{N}$ e $n = \alpha$, se $\alpha \in \mathbb{N}$.

Nestes termos, inspirados por [2], o PVIF objeto de estudo deste escrito é o que segue:

$${}^C D_t^\alpha u(x, t) = K u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < \pi, \quad (5)$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad (6)$$

onde K é uma constante positiva.

Nossa abordagem do problema (3)-(6) é via o método de separação de variáveis. Nesse sentido, surgem duas equações diferenciais, dentre elas a equação diferencial ordinária fracionária

$${}^C D_t^\alpha T(t) - K \sigma T(t) = 0, \quad (7)$$

onde σ é um parâmetro independente de x e t .

Para resolver a equação (7) utilizamos a transformada de Laplace, de forma que concluímos que

$$T_n(t) = T_0 E_\alpha(-K n^2 t^\alpha), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

sendo T_0 uma constante e

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

a função de Mittag-Leffler.

Portanto, encontramos não uma, mas uma família de soluções da forma

$$u_n(x, t) = B_n \sin(nx) E_\alpha(-K n^2 t^\alpha), \quad 0 \leq x \leq \pi, t > 0, n \in \mathbb{N}, \quad (10)$$

onde B_n representam constantes.

¹Programa de Pós-Graduação em Matemática - Universidade Estadual de Maringá - Maringá - PR - pgptorelli@gmail.com

²Departamento de Matemática - Universidade Estadual de Maringá - Maringá - PR - clfrota@uem.br

Com o intuito de expandir a classe de funções f que possam compor o problema, é adequado considerar formalmente uma série dos termos u_n , ou seja, considerar a função

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx) E_{\alpha}(-Kn^2 t^{\alpha}), \quad 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0, \quad (11)$$

com

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi) \operatorname{sen}(n\xi) d\xi. \quad (12)$$

Note que é necessário garantirmos a convergência da série que define tal função, o que provamos utilizando o Teste M de Weierstrass (veja [1]), portanto, majoramos os termos em (10), mais especificamente, a função de Mittag-Leffler envolvida.

Consideramos então as análises de Gorenflo e Mainardi em [5], de modo a concluirmos que para $0 < \alpha < 1$, $E_{\alpha}(-Kn^2 t^{\alpha})$ é completamente monótona (decrecente), não possui zeros e tende a zero quando $t \rightarrow \infty$. Além disso, se $1 < \alpha < 2$, $E_{\alpha}(-Kn^2 t^{\alpha})$ exibe um número ímpar de zeros (devido às oscilações de amplitudes que decaem), e para t suficientemente grande esta função se torna permanentemente negativa, tendendo a zero. Nos casos inteiros, $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$, temos facilmente a limitação desejada. Portanto, concluímos que $|E_{\alpha}(-Kn^2 t^{\alpha})| \leq 1, \forall t \geq 0$.

A partir da Desigualdade de Bessel (vide [4]), conseguimos também majorar os termos b_n de (11). O Teste M de Weierstrass então nos permite concluir o seguinte resultado:

Proposição 0.1. *Seja $f \in C([0, \pi])$ com $f(0) = f(\pi) = 0$ e $f' \in L^2([0, \pi])$. Então a função u dada por (11), com b_n dados por (12), define uma função contínua em $[0, \pi] \times [0, \infty)$.*

Verdadeiramente, as condições impostas sobre f na Proposição 0.1 possibilitam a solução do problema (3)-(6) para $\alpha = 1$, como visto em [4]. Neste caso, a equação em (3) se reduz à equação do calor (ou equação de difusão). Já no caso $\alpha = 2$, temos a equação da onda, e neste caso, por [4], a função f deve ter mais regularidade. Por exemplo, para convergência pontual deve-se ter $f \in C^2([0, \pi])$, com f''' seccionalmente contínua e $f(0) = f(\pi) = f''(0) = f''(\pi) = 0$.

De modo geral, com suficiente regularidade sobre o dado inicial f é possível concluir que a função u dada por (11) com b_n dados por (12) é solução do problema (3)-(6), para que por exemplo seja possível realizar operações termo a termo na série que define a candidata a solução, e então concluir a existência de solução para o PVIF considerado, análises essas aqui não contempladas.

Agradecimentos

Agradeço ao CNPq por financiar este trabalho.

Referências

- [1] R. G. Bartle. **Elementos de Análise Real**. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1983.
- [2] V. Daftardar-Gejji e H. Jafari. “Boundary value problems for fractional diffusion-wave equation”. Em: **Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications** 3 (2006), pp. 1–8. DOI: 10.1007/s40314-014-0163-6.
- [3] K. Diethelm. **The Analysis of Fractional Differential Equations**. Berlin: Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2004.
- [4] D. G. Figueiredo. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. 4a. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [5] R. Gorenflo e F. Mainardi. “Fractional oscillations and Mittag-Leffler functions”. Em: **Proceedings of the International Workshop on the Recent Advances in Applied Mathematics (RAAM’96)**. 1996, pp. 193–208.
- [6] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava e J. J. Trujillo. **Theory and Applications of Fractional Differential Equations**. Amsterdam: Mathematics Studies. v. 204. Elsevier, 2006.

4 Trabalhos nível doutorado - Tipo C

Apresentamos aqui os resumos expandidos dos trabalhos a nível de doutorado, sendo eles algumas teses já defendidas e outras ainda em andamento, estes trabalhos foram apresentados em nosso evento na forma de apresentação oral com duração de 20 minutos.

Sumário

1. Alessandra Piske - Equações de evolução envolvendo um operador tipo Laplaciano-logarítmico
2. Carlos Pecorari Neto - Atratores exponenciais para semigrupos κ -dissipativos
3. Fabiano Pereira - Sistemas Dinâmicos Impulsivos
4. Francieli Triches - Listas e matrizes de incidência como formas de compreensão do divisor excepcional de folheações de codimensão um em $\mathbb{C}^3$
5. Leonardo Guarnieri Justino - Leis Distributivas Parciais
6. Rafaela Filippozzi - A new heuristic to solve the spherical convex-hull membership problem

Equações de evolução envolvendo um operador tipo Laplaciano-logarítmico

Alessandra Piske¹, Ruy Coimbra Charão², Ryo Ikehata³

Palavras-chave: Equações de evolução. Operador Laplaciano-logarítmico. Dissipação logarítmica.

Em 2020, o trabalho de Charão-Ikehata [2] foi o primeiro de uma sequência de estudos a respeito de equações de evolução baseadas em um operador autoadjunto e não negativo L chamado de Laplaciano-logarítmico. Este operador é definido formalmente como

$$L = \log(I - \Delta), \quad (1)$$

com símbolo no espaço de Fourier dado por $\log(1 + |\xi|^2)$.

Em [5], os autores já haviam estudado um problema de Dirichlet envolvendo um outro operador dado pela composição do operador $-\Delta$ e a função logarítmica cujo símbolo é $\log(|\xi|^2)$ no espaço de Fourier. Posteriormente ao estudo em [2], o mesmo operador dado em (1) também é estudado em [6] em um problema de Dirichlet, mas visto como um operador integral.

Em [2] os autores estudam o problema de Cauchy para a equação da onda

$$u_{tt} - \Delta u + Lu_t = 0.$$

Em seguida, Charão-D'Abbicco-Ikehata [1] generalizaram o problema acima considerando um operador L_θ com símbolo $\log(1 + |\xi|^{2\theta})$ para parâmetros $\theta > \frac{1}{2}$. Nestes dois trabalhos citados, os autores verificam que a dissipação $L_\theta u_t$ produz mesmas estimativas de decaimento e/ou crescimento que a dissipação $(-\Delta)^\theta u_t$ já bem estudada (e.g. [9]). O operador L , porém, tem a vantagem de ser mais fraco que o operador Laplaciano, visto que o domínio de L contém o domínio de $-\Delta$ e, dado $f \in H^2(\mathbb{R}^n)$, tem-se $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ para $0 \leq s \leq 1$, enquanto $L^{\frac{1}{2}}f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ para todo $0 \leq s < 2$.

Neste sentido estudamos as equações de evolução dissipativas

$$u_{tt} + Lu + Lu_t = 0, \quad (2)$$

$$u_{tt} + Lu + (I + L)^{-1}u_t = 0, \quad (3)$$

$$u_{tt} - \Delta u + L_\theta u_t = 0, \quad 0 < \theta < \frac{1}{2}, \quad (4)$$

nos trabalhos [3], [4] e [11], respectivamente.

Em [3] e [4], mostramos que soluções de problemas associados às equações (2) e (3) também apresentam propriedades assintóticas semelhantes às equações da onda usuais onde o operador $-\Delta$ é considerado em vez de L (e.g [9], [7], [8]).

Os problemas associados às equações (4) para valores de $\theta \in [0, \frac{1}{2})$ são estudados em [11]. Mostramos que a equação apresenta o assim chamado fenômeno de *difusão dupla*, pois a solução possui um perfil assintótico dado por

$$\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} \left(P_1 \frac{e^{-\frac{|\xi|^2}{\log(1+|\xi|^{2\theta})}t}}{\log(1+|\xi|^{2\theta})} - P_1 \frac{e^{-\log(1+|\xi|^{2\theta})t}}{\log(1+|\xi|^{2\theta})} \right), \quad (5)$$

que é a diferença entre soluções de duas equações de difusão. Nos casos em que a dimensão $n > 4\theta$ o perfil assintótico pode ser do tipo difusivo, isto é, solução de apenas uma equação de

¹Departamento de Matemática-Universidade Federal de Santa Catarina - Florianópolis - SC - alessandra.piske@posgrad.ufsc.br

²Departamento de Matemática - Universidade Federal de Santa Catarina - Florianópolis - SC - ruy.charao@ufsc.br

³Department of Mathematics -Hiroshima University - Higashi-Hiroshima - Japan - ikehatar@hiroshima-u.ac.jp

difusão que possui taxa de decaimento $t^{-\frac{n-4\theta}{4(1-\theta)}}$ já conhecida para equações da onda usuais com dissipação $(-\Delta)^\theta u_t$ (e.g. [10]).

Observamos, no entanto, que no caso $n = 1$ com $\frac{1}{4} \leq \theta < \frac{1}{2}$ a dupla difusão é um fenômeno essencial para que taxas de crescimento sejam obtidas. De fato, em [11] provamos que a solução tem *blow-up* em tempo infinito com taxa ótima de crescimento dada por $t^{\frac{4\theta-1}{4\theta}}$ se $\frac{1}{4} < \theta < \frac{1}{2}$ e $\sqrt{\log t}$ para $\theta = \frac{1}{4}$. Ao que parece essas taxas de crescimento ainda não tinham sido descobertas e as mesmas estimativas também podem ser verificadas para as equações da onda com dissipação $(-\Delta)^\theta u_t$.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Referências

- [1] R. C. Charão, M. D’Abicco e R. Ikehata. “Asymptotic profile for a wave equations with parameter dependent logarithmic damping”. Em: **Math. Meth. Appl. Sci.** 44 (2021), pp. 14003–14024. DOI: 10.1002/mma.7671.
- [2] R. C. Charão e R. Ikehata. “Asymptotic profile and optimal decay of solutions of some wave equations with logarithmic damping”. Em: **Z. Angew. Math. Phys.** 71 (2020). DOI: 10.1007/s00033-020-01373-x.
- [3] R. C. Charão, A. Piske e R. Ikehata. “A dissipative logarithmic type evolution equation: asymptotic profile and optimal estimates”. Em: **J. Math. Anal. Appl.** 506 (2022), p. 125587. DOI: 10.1016/j.jmaa.2021.125587.
- [4] R. C. Charão, A. Piske e R. Ikehata. “A dissipative logarithmic-Laplacian type of plate equation: Asymptotic profile and decay rates”. Em: **Discrete Contin. Dyn. Syst.** 42 (2022), pp. 2215–2255. DOI: 10.3934/dcds.2021189.
- [5] H. Chen e T. Weth. “The Dirichlet problem for the logarithmic Laplacian”. Em: **Communications in Partial Differential Equations** 44 (2019), pp. 1100–1139. DOI: 10.1080/03605302.2019.1611851.
- [6] P. A. Feulefack. “The logarithmic Schrödinger operator and associated Dirichlet problems”. Em: **J. Math. Anal. Appl.** 517 (2023). Aceito. DOI: 10.1016/j.jmaa.2022.126656.
- [7] T. Fukushima, R. Ikehata e H. Michihisa. “Asymptotic profiles for damped plate equations with rotational inertia terms”. Em: **J. Hyperbolic Differ. Equ.** 17 (2020), pp. 569–589. DOI: 10.1142/S0219891620500162.
- [8] J. L. Horbach, R. Ikehata e R. C. Charão. “Optimal decay rates and asymptotic profile for the plate equation with structural damping”. Em: **J. Math. Anal. Appl.** 440 (2016), pp. 529–560. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.03.046.
- [9] R. Ikehata e M. Onodera. “Remark on large time behavior of the L^2 -norm of solutions to strongly damped wave equations”. Em: **Diff. Int. Eqns.** 30 (2017), pp. 505–520.
- [10] R. Ikehata e H. Takeda. “Asymptotic profiles of solutions for structural damped wave equations”. Em: **J. Dynamics and Differential Equations** 31 (2019), pp. 537–571. DOI: 10.1007/s10884-019-09731-8.
- [11] A. Piske, R. C. Charão e R. Ikehata. “Double diffusion structure of logarithmically damped wave equations with a small parameter”. Em: **J. Differential Equations.** 311 (2022), pp. 188–228. DOI: 10.1016/j.jde.2021.12.010.

Atratores Exponenciais para Semigrupos κ -dissipativos

Carlos Pecorari Neto¹, Matheus Cheque Bortolan²

Palavras-chave: Semigrupos, atratores globais, atratores exponenciais, medida de não-compacidade Kuratowski.

Introdução

O atrator global é considerado uma das estruturas fundamentais no estudo do comportamento assintótico de sistemas dinâmicos dissipativos de dimensão infinita. Tal atrator, porém, tem suas desvantagens: geralmente é sensível a perturbações, sua taxa de atração não é conhecida e pode não ser determinada. Para contornar estes problemas, principalmente com o objetivo de estudar um tipo de atrator que seja mais robusto com relação às perturbações, o conceito de atrator exponencial foi proposto e estudado em [4] por Eden, Foias, Nikolaenko e Temam. A saber, o atrator exponencial é um conjunto compacto de dimensão fractal finita, positivamente invariante, contendo o atrator global, e que atrai limitados do espaço sob a ação de uma taxa exponencial.

Nas últimas três décadas vários métodos têm sido propostos para a construção de atratores exponenciais e, em geral, exigem algumas condições de suavidade para o semigrupo que modela a equação em estudo. Neste trabalho estudamos o método abordado no artigo [5], cujas ideias residem em definições e resultados baseados amplamente no uso da medida de não-compacidade de Kuratowski para trabalhar com semigrupos mais gerais, que não necessariamente apresentem tais condições suavizantes, o que nos permite obter um conjunto que é “quase” o atrator exponencial.

Discussão e resultados

O conceito de semigrupo exponencialmente κ -dissipativo – conforme definição 1 – é essencial para a busca de um atrator exponencial, para o desenvolvimento de parte de sua construção, bem como sua relação com o atrator global, como justificado pelos Teoremas 1 e 2 abaixo apresentados.

Definição 1. Um semigrupo $S = \{S(t): t \geq 0\}$ em um espaço métrico completo X é chamado exponencialmente κ -dissipativo se para cada $B \subseteq X$ limitado existem constantes $t_0 = t_0(B) \geq 0$, $C = C(B) \geq 0$ e $\alpha = \alpha(B) > 0$ tais que $\kappa(\bigcup_{t \geq s} S(t)B) \leq Ce^{-\alpha s}$ para todo $s \geq t_0$, onde κ representa a medida de não-compacidade de Kuratowski.

Teorema 1. Se S é semigrupo exponencialmente κ -dissipativo e $B_0 \subseteq X$ é um limitado que absorve limitados, então $\mathcal{A} = \omega(B_0) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)B_0}$ é atrator global de S .

Teorema 2. Se S é semigrupo exponencialmente κ -dissipativo e existe $B_0 \subseteq X$ limitado que absorve limitados, então existe conjunto compacto $\mathcal{A}^*$ que é positivamente invariante, contém $\mathcal{A}$, e atrai exponencialmente limitados de X .

Quando trabalhamos em espaços de Banach um dos resultados fundamentais que garantem que um semigrupo é exponencialmente κ -dissipativo é dado pelo teorema a seguir, para o qual P indica o operador projeção de X sobre X_1 .

¹ Doutorando em Matemática. PPGMTM - Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis/SC. E-mail: carlospecorarineto@gmail.com.

² Doutor em Matemática. Departamento de Matemática. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis/SC. E-mail: m.bortolan@ufsc.br.

Teorema 3. Se S é um semigrupo em um espaço de Banach X de modo que dado $B \subseteq X$ limitado, existem constantes $t_0 = t_0(B) \geq 0$, $C = C(B) \geq 0$ e $\alpha = \alpha(B) > 0$ tais que para cada $\epsilon > 0$ existe um subespaço finito-dimensional X_1 de X para o qual $\{\|PS(t)x\|: x \in B, t \geq t_0\}$ é limitado e $\|(I - P)S(t)x\| \leq Ce^{-\alpha t} + \epsilon$ para todo $x \in B$ e $t \geq t_0$, então S é exponencialmente κ -dissipativo.

Vale observar que para garantir que o conjunto obtido no Teorema 2 seja efetivamente um atrator exponencial resta verificar que sua dimensão fractal é finita. Resultados nessa linha são obtidos impondo-se condições Lipschitz e de diferenciabilidade adequadas sobre S e estão intimamente ligados às características da equação estudada nas aplicações.

Considerações finais

Este estudo de atratores exponenciais para semigrupos, juntamente com os avanços obtidos pelo trabalho [8] de Zhao, Zhong e Zhu com relação à sua generalização para um tipo de atração controlada por uma função φ adequada, lançaram luz ao nosso estudo de φ -atratores para problemas não-autônomos, estudados sob a ótica da modelagem por meio de processos de evolução. Neste sentido, temos trabalhado na busca de condições de dissipatividade para tais processos, na construção do φ -atrator considerando as dinâmicas *pullback* e uniforme, na sua relação com os atratores *pullback* e uniforme, bem como suas respectivas aplicações.

Referências

- [1] A. N. Carvalho, J. A. Langa, and J. C. Robinson. ***Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems***. Volume 182 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, 2013.
- [2] A. N. Carvalho and S. Sonner. **Pullback exponential attractors for evolution processes in Banach spaces: theoretical results**. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 12(6):3047–3071, 2013.
- [3] A. N. Carvalho e S. Sonner. **Pullback exponential attractors for evolution processes in Banach spaces: properties e applications**. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 13(3):1141–1165, 2014.
- [4] A. Eden, C. Foias, B. Nicolaenko and R. Temam. **Exponential attractors for dissipative evolution equations**. *John Wiley & Sons, New-York*, 1994.
- [5] J. Zhang, P. E. Kloeden, M. Yang, e C. Zhong. **Global exponential κ -dissipative semigroups e exponential attraction**. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 37(6):3487–3502, 2017.
- [6] C. Zhao, C. Zhao, e C. Zhong. **Asymptotic behavior of the wave equation with nonlocal weak damping and anti-damping**. *J. Math. Anal. Appl.*, 490(1):124186, 16, 2020.
- [7] C. Zhao, C. Zhong, e S. Yan. **Existence of a generalized polynomial attractor for the wave equation with nonlocal weak damping, anti-damping e critical nonlinearity**. *Appl. Math. Lett.*, 128:Paper No. 107791, 9, 2022.
- [8] C. Zhao, C. Zhong, e X. Zhu. **Existence of compact φ -attracting sets e estimate of their attractive velocity for infinite-dimensional dynamical systems**. *Disc. Cont. Dynam. Sys. - B*, 1(1), 2022.

Sistemas dinâmicos impulsivos

Fabiano Pereira¹, Matheus Cheque Bortolan²

As soluções de problemas modelados por meio de equações diferenciais cujos termos não dependem explicitamente do tempo definem, em geral, o que chamamos de **sistemas dinâmicos autônomos**, ou simplesmente **semigrupos**, isto é, uma família de aplicações $\pi = \{\pi(t) : t \geq 0\}$ num espaço métrico X que avaliam a evolução de um estado x ao longo do tempo t de forma contínua.

No entanto, existem fenômenos nos quais as mudanças contínuas de estados podem sofrer variações inesperadas (impulsos) que mudam seu comportamento. Por exemplo: a ingestão de um medicamento, onde devemos tomar doses regulares, causa mudanças abruptas na quantidade de medicamento em nosso corpo para combater a doença.

A teoria dos sistemas dinâmicos impulsivos aborda esse tipo de problema: onde a evolução contínua dos processos é interrompida por mudanças abruptas de estado, dado um conjunto fixo de possíveis obstáculos.

No caso contínuo sabemos que o atrator global de um semigrupo π em um espaço métrico X quando existe, é único, e é o objeto que define o comportamento assintótico do semigrupo π , uma vez que atrai todas as trajetórias $[0, \infty) \ni t \mapsto \pi(t)x \in X$. Além disso, o atrator global é constituído por todas as trajetórias globalmente definidas (isto é, definidas para todo $t \in \mathbb{R}$) e limitadas. Na prática, isso significa que o atrator é formado por todas as trajetórias “relevantes”. Portanto, tal objeto desempenha um papel fundamental na compreensão da dinâmica do semigrupo π .

Vários autores nas últimas quatro décadas têm tentado replicar essa noção para *semigrupos impulsivos*. Combinando os trabalhos de [2], [3], [1] e [4], fomos capazes de apresentar a teoria de semigrupos impulsivos e seus atratores globais com um relaxamento em uma das condições da definição de um *conjunto impulsivo*. Para esclarecer melhor a melhora que introduzimos nessa teoria, apresentaremos a *nossa* definição para um *sistema dinâmico impulsivo*.

Definição (Sistema dinâmico impulsivo). Um **sistema dinâmico impulsivo** (ou **sistema dinâmico autônomo impulsivo**), consiste de uma tripla (π, M, I) , sendo

- π um semigrupo em um espaço métrico (X, d) ;
- M um subconjunto fechado de X , chamado de **conjunto impulsivo**, com a propriedade de que para cada $x \in M$ existe $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ tal que

$$\pi(t)x \notin M \quad \text{para todo} \quad 0 < t < \varepsilon;$$

- $I: M \rightarrow X$ uma função contínua, chamada **função impulso**.

Nos trabalhos anteriores, como por exemplo em [2–4], há a hipótese adicional de que para cada $x \in M$ existe $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ tal que

$$\{z \in X : \pi(t)z = x \text{ para algum } t \in (0, \varepsilon)\} \cap M = \emptyset. \quad (1)$$

Isto quer dizer que era necessária também a hipótese de que, dado $x \in M$, para chegar em x por um ponto de M , precisaríamos andar pelo menos um intervalo de tempo maior do que $\varepsilon(x)$. A condição (1), apesar de ter apresentação simples, não é facilmente verificada em aplicações (seria, em geral, necessário resolver problemas de controle). Por esse motivo, acreditamos ser de grande utilidade o desenvolvimento da teoria de sistemas dinâmicos impulsivos sem o uso de (1), e essa é a nossa primeira contribuição.

¹Doutorando em Matemática - Universidade Federal de Santa Catarina - Campus Florianópolis. Professor na Universidade Federal da Fronteira Sul - email: fpereira.mat@gmail.com

²Departamento de Matemática - Universidade Federal de Santa Catarina - Campus Florianópolis - email: m.bortolan@ufsc.br

Para cada $x \in X$, temos somente duas opções: ou $\pi(t)x \notin M$ para todo $t > 0$ ou existe $s > 0$ tal que $\pi(t)x \notin M$ para $0 < t < s$ e $\pi(s)x \in M$. No primeiro caso, definimos $\phi(x) = \infty$. No segundo, definimos $\phi(x) = s$. A função $\phi: X \rightarrow (0, \infty]$ é chamada de **função tempo de impacto** de (π, M, I) .

Para desenvolver a teoria de semigrupos impulsivos precisamos das seguintes condições:

$$\text{existe } \delta > 0 \text{ tal que } \phi(x) \geq 2\delta \text{ para todo } x \in I(M). \quad (\text{H})$$

$$I(M) \cap M = \emptyset. \quad (\text{I})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{dado } t > 0, x \in M, \text{ e uma sequência convergente } \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ em } X \\ \text{tal que } \pi(t)z_n \rightarrow x, \text{ existe uma sequência } \{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \\ \text{com } \alpha_n \rightarrow 0 \text{ e } t + \alpha_n > 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ tal que, a menos de} \\ \text{subsequência, temos } \pi(t + \alpha_n)z_n \in M. \end{array} \right. \quad (\text{T})$$

A definição de atrator global que utilizamos aparece nos trabalhos [3, 4] e é a seguinte:

Definição (Atrator global). Um subconjunto $\mathcal{A} \subset X$ é um **atrator global** para um semigrupo impulsivo $\tilde{\pi}$ se:

- $\mathcal{A}$ é compacto;
- $\mathcal{A}$ $\tilde{\pi}$ -atrai todos os subconjuntos limitados de X ;
- $\mathcal{A} \setminus M$ é $\tilde{\pi}$ -invariante.

Para semigrupos impulsivos em geral, podemos não ter a unicidade do atrator global, como no caso contínuo, no entanto com as condições (H), (I) e (T) fomos capazes de mostrar que o atrator global para um semigrupo impulsivo $\tilde{\pi}$, quando existe, é único.

Em [2] os autores introduziram uma noção ligeiramente de atrator global para um semigrupo impulsivo $\tilde{\pi}$. Porém, novamente utilizando as condições (H), (I) e (T), fomos capazes de unificar as definições, isto é, mostramos que elas são equivalentes.

Agradecimentos

À Universidade Federal da Fronteira Sul, pelo apoio financeiro, e à UFSC.

Referências

- [1] E. M. Bonotto et al. “Global attractors for impulsive dynamical systems - a precompact approach”. Em: **J. Differential Equations** 259.7 (2015), pp. 2602–2625. ISSN: 0022-0396. DOI: 10.1016/j.jde.2015.03.033. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.03.033>.
- [2] Everaldo M. Bonotto et al. “Impulsive non-autonomous dynamical systems and impulsive cocycle attractors”. Em: **Math. Methods Appl. Sci.** 40.4 (2017), pp. 1095–1113. ISSN: 0170-4214. DOI: 10.1002/mma.4038. URL: <https://doi.org/10.1002/mma.4038>.
- [3] Everaldo Mello Bonotto e Piotr Kalita. “On attractors of generalized semiflows with impulses”. Em: **J. Geom. Anal.** 30.2 (2020), pp. 1412–1449. ISSN: 1050-6926. DOI: 10.1007/s12220-019-00143-0. URL: <https://doi.org/10.1007/s12220-019-00143-0>.
- [4] Matheus C. Bortolan e José Manuel Uzal. “Pullback attractors to impulsive evolution processes: applications to differential equations and tube conditions”. Em: **Discrete Contin. Dyn. Syst.** 40.5 (2020), pp. 2791–2826. ISSN: 1078-0947. DOI: 10.3934/dcds.2020150. URL: <https://doi.org/10.3934/dcds.2020150>.

Listas e matrizes de incidência como formas de compreensão do divisor excepcional de folheações de codimensão um em $\mathbb{C}^3$

Francieli Triches¹, Prof^a Dr^a. Marianna Ravara Vago²

Palavras-chave: Folheações holomorfas singulares, redução de singularidades, grafos.

Neste trabalho apresentamos objetos que nos auxiliarão a compreender a estrutura do divisor excepcional proveniente da redução de singularidades de uma folheação holomorfa singular de codimensão um em $(\mathbb{C}^3, 0)$. Apresentaremos neste resumo as ideias principais através do exemplo de uma situação simplificada.

Seja $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ uma folheação holomorfa singular em $(\mathbb{C}^3, 0)$ gerada pelo germe de 1-forma diferencial

$$\omega = \alpha yzdx + \beta xzdy + \gamma xydz$$

onde $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \mathbb{Q}$ e $\gamma \in \mathbb{R}_{< 0}$. Notamos que a origem e os três eixos coordenados x, y, z pertencem ao conjunto de singularidades da folheação $\mathcal{F}$.

Pela classificação de singularidades em dimensão 2 como $\{\frac{\beta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\gamma}\} \subset \mathbb{R}_{< 0} \setminus \mathbb{Q}$ decorre que o eixo x e o eixo y são genericamente nodais (isto é, um ponto genérico de um destes eixo é uma singularidade de tipo nó em dimensão 2). Além disso, $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ implica que o eixo z não é genericamente nodal. Dizemos que a união $N = \{\text{eixo } x\} \cup \{\text{eixo } y\}$ é uma *componente nodal* desta folheação.

Uma folheação holomorfa em $(\mathbb{C}^3, 0)$ admite uma redução de singularidades dada por $\pi : (M, D) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ onde π é uma composição finita de morfismos π_i chamados *blow-ups*; como estamos em $\mathbb{C}^3$ cada um destes morfismos tem como centro um ponto ou uma curva "bem posicionada". A pré-imagem de cada centro pelo morfismo correspondente dá origem a uma componente $D_i = \pi_i^{-1}(Y_{i-1})$ do divisor D . Para um ponto P , temos que $\pi^{-1}(P) \simeq \mathbb{CP}(2)$, e para uma curva Γ , temos que $\pi^{-1}(\Gamma)$ é localmente isomorfo a $\mathbb{C} \times \mathbb{CP}(1)$.

Como estamos considerando $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ reduzida, os três planos coordenados são na verdade três componentes do divisor, denotadas por $D_1 = \{x = 0\}$, $D_2 = \{y = 0\}$, $D_3 = \{z = 0\}$, e o divisor é $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Nesta configuração, $D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \{0\}$ é um ponto triplo, e $D_1 \cap D_2 = \{\text{eixo } z\}$, $D_1 \cap D_3 = \{\text{eixo } y\}$, $D_2 \cap D_3 = \{\text{eixo } x\}$ são os eixos coordenados.

A partir do conjunto de índices $I = \{1, 2, 3\}$, definimos os seguintes conjuntos de listas: $\mathcal{H}(1)$ para listar os divisores; $\mathcal{H}(2)$ para listar as interseções não vazias entre dois divisores; e $\mathcal{H}(3)$ para listar os pontos triplos. Para a folheação $\mathcal{F}$ temos $\mathcal{H}(1) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\mathcal{H}(2) = \{a_1 = \{1, 2\}, a_2 = \{1, 3\}, a_3 = \{2, 3\}\}$ e $\mathcal{H}(3) = \{\{1, 2, 3\}\}$.

Definimos também o conjunto $\mathcal{H} = \mathcal{H}(1) \cup \mathcal{H}(2) \cup \mathcal{H}(3)$. Dizemos que $\mathcal{H}$ é *conexo* se um elemento de $\mathcal{H}(1)$ pode ser ligado a outro através de elementos de $\mathcal{H}(2)$. Por exemplo, podemos ligar $\{1\}$ a $\{2\}$ pois $\{1, 2\} \in \mathcal{H}(2)$. Por último, dentro de $\mathcal{H}$ temos também a lista associada à componente nodal: $\mathcal{N} = \{\{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3\}\}$.

Ao conjunto $\mathcal{H}$ associamos um grafo $G = (V, A)$, cujo conjunto de vértices é $V = \mathcal{H}(1)$ e o conjunto de arestas é $A = \mathcal{H}(2)$. Sabemos que todo grafo G com n vértices e m arestas pode ser representado por uma matriz de incidência $B = \{b_{kl}\}_{n \times m}$, dada por

$$b_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{a aresta } a_l \text{ incide no vértice } k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

No nosso exemplo teremos a matriz de incidência B abaixo. Por propriedades da matriz de incidência decorre que o grafo $G = (V, A)$ é conexo, e portanto o divisor D também é conexo.

¹Doutoranda em Matemática - PPGMTM-UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina - Florianópolis-SC - frantriches@gmail.com

²Doutora em Matemática. Departamento de Matemática - Universidade Federal de Santa Catarina - Florianópolis-SC - marianna.v@ufsc.br

Por outro lado, se considerarmos $\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}$, vemos que este conjunto não é conexo. Note que $\mathcal{H} \setminus \mathcal{N}$ corresponde à lista de $D \setminus N$, a matriz de incidência B' deste conjunto pode ser obtida zerando as colunas de B que representam os elementos de N .

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, se fizermos o blow-up da origem, obtemos um novo divisor $D_4 = \pi^{-1}(0)$. Como $D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \{0\}$ decorre que $D_4 \cap D_i \neq \emptyset, \forall i \in \{1, 2, 3\}$. Vejamos como ficam as listas e a matriz de incidência do transformado da folheação $\mathcal{F}$ após blow-up.

O conjunto de índices passa a ser $\tilde{I} = \{1, 2, 3, 4\}$, e as listas que descrevem as interseções entre os divisores nesta situação são: $\tilde{\mathcal{H}}(1) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$, $\tilde{\mathcal{H}}(3) = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$, e $\tilde{\mathcal{H}}(2) = \{a_1 = \{1, 2\}, a_2 = \{1, 3\}, a_3 = \{2, 3\}, a_4 = \{1, 4\}, a_5 = \{2, 4\}, a_6 = \{3, 4\}\}$. O conjunto $\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}(1) \cup \tilde{\mathcal{H}}(2) \cup \tilde{\mathcal{H}}(3)$ é conexo e gera o grafo $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{A}) = (\tilde{\mathcal{H}}(1), \tilde{\mathcal{H}}(2))$, cuja matriz de incidência é $\tilde{B}$.

O transformado da componente nodal N é dado por $\tilde{N} = \{D_1 \cap D_3\} \cup \{D_2 \cap D_3\} \cup \{D_3 \cap D_4\}$; portanto temos que $\tilde{\mathcal{N}} = \{\{1, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3\}\}$. Se considerarmos o conjunto $\tilde{\mathcal{H}} \setminus \tilde{\mathcal{N}}$, vemos que ele não é conexo. Além disso, a matriz de incidência $\tilde{B}'$ deste conjunto pode ser obtida zerando as colunas que representam os elementos de $\tilde{\mathcal{N}}$, como fizemos anteriormente.

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que a terceira linha de $\tilde{B}'$, que representa o vértice $\{3\}$, é nula; logo por propriedades da matriz de incidência obtemos que o grafo $\tilde{G}'$ é composto pelas componentes conexas disjuntas $G_1 = \{\{3\}, \emptyset\}$ e $G_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{4\}\}, \{a_1, a_4, a_5\}$. Isto implica que a componente nodal $\tilde{N}$ separa o divisor $D = \cup_{i=1}^4 D_i$ em duas componentes conexas disjuntas, atuando como um separador para o espaço das folhas de $\mathcal{F}$.

Esta situação local simplificada se repete globalmente, garantindo assim a validade do seguinte resultado no caso geral: *o complementar de uma componente nodal no divisor excepcional tem duas componentes conexas.*

Agradecimentos

Agradeço a CAPES pela bolsa de doutorado que viabilizou a realização deste trabalho.

Referências

- [1] Felipe Cano. “Reduction of the singularities of codimension one singular foliations in dimension three”. Em: **Annals of mathematics** 160.3 (2004), pp. 907–1011.
- [2] Felipe Cano, Jean François Mattei e Marianna Ravara-Vago. “Invariant hypersurfaces and nodal components for codimension one singular foliations”. Em: **Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas** 114.4 (2020). Acesso em: 22 jan. 2022, pp. 1–35.
- [3] Reinhard Diestel. **Graph theory 3rd ed.** Vol. 173. Graduate texts in mathematics, 2005.
- [4] Alcides Lins Neto e Bruno Scárdua. **Folheações algébricas complexas.** Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 316 pp.

Leis Distributivas Parciais

Leonardo Guarnieri Justino¹, Prof. Dr. Eliezer Batista²

Palavras-chave: Álgebra. Ações parciais. Categorias.

Em um artigo de 1992, Ruy Exel introduziu a noção de ações parciais de um grupo em um conjunto como forma de estudar ações do círculo em uma C^* -álgebra [3]. Desde então, o estudo de ações parciais tem se ramificado para outros contextos. Entre esses, temos a definição de uma ação parcial de uma álgebra de Hopf em uma álgebra [1].

Algumas generalizações foram feitas com o objetivo de estender esse conceito, como pode ser visto em Vilaboa et al., [4] no qual é realizado o estudo de produtos cruzados fracos. Leis distributivas parciais são intimamente relacionadas com essas, partindo de hipóteses mais fortes que nos permitem definir uma estrutura do tipo. Todavia, produtos cruzados fracos precisam de uma pré-unidade para determinadas construções. Esse trabalho vai em outra direção, substituindo a pré-unidade por uma unidade à esquerda.

O objetivo do trabalho é criar uma linguagem mais robusta baseada na noção de uma ação parcial, que poderá ser aplicada naturalmente ao caso de mônadas, sem a necessidade de que tenhamos uma estrutura de álgebra de Hopf, ou ao menos de uma biálgebra, tendo em vista que a noção de biálgebra está definida em geral para uma categoria monoidal trançada, e esta trança não está presente na categoria monoidal de endofuntores.

Formalmente, dados dois monoides X e Y em uma categoria monoidal $\mathcal{C}$, uma lei distributiva parcial é um morfismo $\lambda : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$ satisfazendo determinadas condições de coerência. Essa noção geral nos dá diversos exemplos, em especial quando trabalhamos em espaços vetoriais, incluindo as ações parciais mencionadas anteriormente.

A definição e terminologia utilizada tem origem nas leis distributivas (que chamamos de leis distributivas totais,) como por exemplo as vistas no artigo de 1969 de Beck [2]. As coerências são similares, mas em analogia com as ações parciais, enfraquecemos uma das condições sobre leis distributivas. Dessa forma, a construção que associa a cada ação total uma lei distributiva total se estende naturalmente para o caso parcial.

Um caso particular interessante ocorre quando consideramos a identidade monoidal I com sua estrutura trivial de monoide. Para espaços vetoriais, isso é equivalente a considerar o corpo base $\mathbb{K}$ como um espaço de dimensão um, e sua estrutura de álgebra induzida pelo corpo. Exemplificaremos a teoria mostrando como esse resultado se aplica em termos concretos.

Dada uma $\mathbb{K}$ -álgebra X , consideraremos uma subálgebra X' . Sabemos que X e X' possuem estruturas de X' -módulo, e observaremos o caso em temos uma projeção $\pi : X \rightarrow X'$ que é homomorfismo de módulos. Isso nos caracterizará as leis distributivas parciais de X para $\mathbb{K}$. Veremos alguns exemplos concretos dessa construção para X sendo uma álgebra de dimensão dois, e mais geralmente, quando X' é uma álgebra de dimensão 1. Também veremos um caso em que X é uma álgebra de matrizes.

Finalmente, daremos um exemplo mais avançado, aplicando o mesmo resultado geral para a categoria oposta à dos espaços vetoriais. Nessa, os monoides são coálgebras e as leis distributivas parciais de uma coálgebra X para $\mathbb{K}$ serão caracterizadas por intermédio de seus coideais.

Referências

- [1] Marcelo Alves e Eliezer Batista. “Partial Hopf actions, partial invariants and a Morita context”. Em: **Algebra and Discrete Math.** 3 (jan. de 2009).

¹Departamento de Matemática Pura e Aplicada. Universidade Federal de Santa Catarina campus Florianópolis.
e-mail: leonardoguarnieri5@gmail.com

²Departamento de Matemática Pura e Aplicada. Universidade Federal de Santa Catarina campus Florianópolis.
e-mail: e.batista@ufsc.br

- [2] Jon Beck. “Distributive laws”. Em: **Seminar on Triples and Categorical Homology Theory**. Ed. por B. Eckmann. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1969, pp. 119–140. ISBN: 978-3-540-36091-9.
- [3] Ruy Exel. “Circle actions on C^* -algebras, partial automorphisms, and a generalized Pimsner-Voiculescu exact sequence”. Em: **Journal of Functional Analysis** 122 (1992), pp. 361–401.
- [4] J.M. Vilaboa, R. González Rodríguez e A. Raposo. “Preunits and weak crossed products”. Em: **Journal of Pure and Applied Algebra** 213 (dez. de 2009), pp. 2244–2261. DOI: 10.1016/j.jpaa.2009.04.005.

A new heuristic to solve the spherical convex-hull membership problem

Rafaela Filippozzi¹, Douglas S. Gonçalves², Luiz-Rafael Santos³

Keywords: Spherical Convex Hull Membership Problem; Convex programming; Spherical Triangle Algorithm.

Let $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_n\}$ be a finite subset of $\mathbb{R}^m$, with $\|s_i\| = 1 \quad \forall i$. The **spherical convex hull membership problem** (Spherical-CHMP) consists in determining if $0 \in \text{conv}(\mathcal{S})$, where $\text{conv}(\mathcal{S})$ denotes the convex hull of $\mathcal{S}$. This problem is related to fundamental concepts in linear programming and finds important applications in computational geometry [2, 3].

Recently, a geometric algorithm has been proposed for this decision problem based on the following theorem of alternatives [4, Theorem 1].

Theorem 1 (Distance duality) *For a given set $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_n\} \subset \mathbb{R}^m$, with $\|s_i\| = 1 \quad \forall i$, precisely one of the two conditions is satisfied:*

1. For all $p' \in \text{conv}(\mathcal{S})$, there exists $s_i \in \mathcal{S}$ such that $\|p' - s_i\| \geq \|s_i\|$;
2. There exists $p' \in \text{conv}(\mathcal{S})$ such that $\|p' - s_i\| < \|s_i\|$, for all $i = 1, \dots, n$.

This result induces the following algorithm. Given $p_k \in \text{conv}(\mathcal{S})$, choose a $s_i \in \mathcal{S} \setminus \{p_k\}$ such that $\|s_i\| \leq \|s_i - p_k\|$, this s_i is called *pivot*. Then define p_{k+1} as the point in the line segment $p_k s_i$ closest to 0. The algorithm continues until $\|p_k\| \leq \varepsilon$. If such s_i does not exist, $0 \notin \text{conv}(\mathcal{S})$ and we call p_k a witness. Since each iteration involves the triangle with vertices $0, p_k$ and s_i , this algorithm is called Spherical Triangle Algorithm (Spherical-TA).

The Spherical-TA convergence rate, for general problems, is $\mathcal{O}(1/\varepsilon^2)$. However, in [4] an improved iteration complexity of $\mathcal{O}(M/\varepsilon)$, with $M \geq 1$ is presented when a better pivot (assuming it exists) is chosen at each iteration. Next we have the definition of the property that such a pivot must have [4, Definition 2].

Definition 1 *Considering the spherical CHMP, $\varepsilon \in (0, 1)$, $M \geq 1$, we say that a point $p' \in \text{conv}(\mathcal{S})$, which is not a witness and for $\|p'\| > \varepsilon$, satisfies a $\frac{\varepsilon}{M}$ -property if there is a pivot s such that*

$$\|p' - s\| \geq \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{M}}. \quad (1)$$

The article [4] proposes a heuristic to find such pivot, however, it does not provide a proof of convergence or correctness.

In this work, we present a new heuristic to find a pair (p', s) that satisfies the $\frac{\varepsilon}{M}$ -property.

As a motivation for the new heuristic we consider at each iteration the following subproblem:

$$\min_{\substack{e^T x = 1, \\ x \geq 0, \\ \|\tilde{\mathcal{S}}x\| \leq \|p'\|}} (\tilde{\mathcal{S}}x)^T s, \quad (2)$$

where s is a pivot and $\tilde{\mathcal{S}} \in \mathbb{R}^{m \times l}$ is the matrix with the l elements of $\mathcal{S}$ that are active in the convex combination of p' , that is, $p' = \tilde{\mathcal{S}}\alpha$ with $e^T \alpha = 1$ and $\alpha > 0$. Note that this problem is feasible, since α is a feasible point for (2).

Concerning this subproblem, the following results are in order.

Theorem 2 *Let $p^* = \tilde{\mathcal{S}}x^*$ where x^* is a solution of (2), then $\|p^* - s\|^2 \geq \|p' - s\|^2$.*

Corollary 1 *If there is $\hat{p}$ such that $\|\hat{p} - s\|^2 \geq 1 + \varepsilon/M$, with $\hat{p} = \tilde{\mathcal{S}}x$, $x \geq 0$, $e^T x = 1$ and $\|\hat{p}\| \leq \|p'\|$, then $p^* = \tilde{\mathcal{S}}x^*$, where x^* is the solution of the subproblem, satisfies the $\frac{\varepsilon}{M}$ -property.*

¹Departamento de Matematica Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC.
Email:rafaela.filippozzi@gmail.com

²Departamento de Matematica Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC.
Email:douglas.goncalves@ufsc.br

³Departamento de Matematica Universidade Federal de Santa Catarina, Blumenau, SC.
Email:l.r.santos@ufsc.br

Therefore, our heuristic either provides a new iterate that satisfies $\frac{\varepsilon}{M}$ -property, or at least a new iterate that potentiality is closer to satisfying (1) than the current iterate. In order to solve this subproblem, we use ideas from [5].

Our numerical study, generated with artificial instances, reveals that this heuristic reduces the number of iterations (in most cases) but this is not always enough to reduce the computational time, as we can see in the Table 1. We are currently working on strategies to solve the subproblem faster and thus gain an advantage in terms of computational time. It is important to note that both algorithms that participated in these experiments take into account a more optimized implementation like the one presented in [1].

Table 1: Time and Iterations				
$m \times n$	Spherical-TA		Spherical-TA with heuristic	
	time	iterations	time	iterations
10×25	0.0158	468	0.0148	360
10×50	0.0010	190	0.0010	167
10×100	0.0003	25	0.0015	25
50×500	0.0023	155	0.0042	145
50×1000	0.0022	90	0.0028	84
50×3000	0.0017	65	0.0014	65
100×250	0.1425	11985	0.0308	2351
100×2000	0.0038	166	0.0060	157
200×400	7.9389	546919	0.0679	4350
200×3000	0.0219	367	0.0352	301

Acknowledgment

RF thanks CAPES for her doctoral scholarship.

References

- [1] R. Filippozzi, D. S. Gonçalves, and L. Santos. “First-order methods for the convex hull membership problem”. In: **European Journal of Operational Research** (2022).
- [2] E. J. Goodman and J. O’Rourke. **Handbook of discrete and computational geometry**. CRC, 1997.
- [3] B. Kalantari. “A Characterization Theorem and an Algorithm for a Convex Hull Problem”. In: **Annals of Operations Research** 226.1 (2014), pp. 301–349.
- [4] B. Kalantari and Y. Zhang. “Spherical Triangle Algorithm: A Fast Oracle for Convex Hull Membership Queries”. In: **arXiv preprint arXiv:1810.07346** (2021). url: <https://arxiv.org/abs/1810.07346>.
- [5] L. Martein and S. Schaible. “On solving a linear program with one quadratic constraint”. In: **Rivista di matematica per le scienze economiche e sociali** 10.1 (1987), pp. 75–90.

5 Palestras

Tivemos também durante o evento a apresentação das seguintes palestras.

Palestrante: Prof Dr. Luiz Antonio Ribeiro de Santana

Título da palestra: "Alguns temas explorados em dissertações do PROFMAT da UFPR"

Resumo: Nesta apresentação, vamos mencionar alguns dos temas explorados em 3 orientações de formandos do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da UFPR, a saber: uma forma diferente de provar identidades dos números de Fibonacci por argumentos geométricos; uma propriedade do triângulo de aritmético, conhecida por Teorema da Estrela de David; e uma identidade similar à do Binômio de Newton, chamada Identidade de Lockwood, com aplicações em alguns contextos específicos importantes, como os próprios Números de Fibonacci.

Palestrante: Prof Dr. Fabio Armando Tal

Título: Caos em baixas dimensões – medindo a complexidade de sistemas dinâmicos

Resumo: Nesta palestra introdutória iremos apresentar aos estudantes alguns sistemas dinâmicos com diferentes propriedades de complexidade. Descreveremos também uma ferramenta para medir a complexidade do sistema, a entropia topológica, e exemplificaremos o processo pelo qual um sistema passa de um regime não caótico para o regime caótico. A ênfase será em sistemas em dimensão 1 ou 2.

Palestrante: Prof Dra. Manuela da Silva Souza

Título: Um convite ao estudo de álgebras não associativas e teoria de identidades polinomiais

Resumo: Nesta palestra vou tentar responder a seguinte pergunta: “O que são essas contas com polinômios não associativos que você tanta faz?”. O objetivo principal é manter a audiência conectada com a exposição pelo maior tempo possível. Fotos, desenhos, exemplos elucidativos e muita contação de história farão parte dos recursos didáticos usados para “vender” minha área de pesquisa e meus trabalhos recentes.

6 Agradecimentos

Agradecemos à Pró-reitoria de Pós-graduação (PROPG) e ao Programa de Pós-graduação em Matemática Pura e Aplicada (PPGMTM) pelo apoio financeiro que permitiu a realização deste evento.

Agradecemos também à CAPES e ao CNPQ pelas bolsas de mestrado e doutorado que viabilizaram a realização destes trabalhos.