Homeomorfismos Ergódicos e o Teorema de Oxtoby-Ulam

Luiz Guilherme de C. Lopes
Universidade federal de Santa Catarina - UFSC, Brasil
luizgui05@gmail.com

Introdução

Em mecânica, um dos problemas fundamentais consiste em descrever qualitativamente a evolução de um sistema dinâmico para o qual está dada uma condição inicial.
Na abordagem clássica queremos responder à pergunta "dada uma condição inicial, qual é o estado do sistema no tempo t?"
Já na abordagem estatística, buscamos responder a "dada uma condição inicial, qual é a probabilidade de que o estado do sistema esteja, no tempo t, num dado conjunto de estados possíveis?"
Interessado nessa abordagem o físico Ludwig Boltzmann formulou ao final do século XIX a seguinte hipótese ("Hipótese Ergódica de Boltzmann"), a saber:

Hipótese Ergódica de Boltzmann Para cada condição inicial x num espaço de estados X e cada $\varphi : X \to \mathbb{R}$ "observação" integrável com respeito a uma probabilidade P, *existe a média temporal assintótica das observações dos estados do sistema* $f : X \to X$ e esta *coincide com a observação média sobre o espaço de todos os estados possíveis* X. Ou seja,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \varphi(f^i(x)) = \int_X \varphi(x)dP(x).$$

A despeito de muitas conclusões físicas corretas obtidas por Boltzmann, sua hipótese provou-se matematicamente errada.
Essa questão foi colocada em base matemática sólida pelo matemático George David Birkhoff em 1931 ao demonstrar o seguinte resultado.

Teorema Ergódico de Birkhoff Para *P-quase toda condição inicial $x \in X$* o limite acima existe e, além disso, a igualdade acima é verdadeira se, e somente se, o sistema $f : X \to X$ *é ergódico com respeito a P*.

Após o surgimento do Teorema Ergódico de Birkhoff surgiu a pesquisa sobre a existência de homeomorfismos ergódicos sobre um espaço clássico dado. Neste trabalho apresentamos a resposta obtida por Oxtoby e Ulam para o caso no qual o espaço em questão é o cubo unitário n-dimensional.

Definições

Definição .1. Dados um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{X}, \mu)$ e uma transformação mensurável $T : X \to X$, dizemos que T *preserva a medida* μ se $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{X}$

Definição .2. Um conjunto $A \in \mathcal{X}$ é dito *T-invariante* se $T^{-1}(A) = A$.

Definição .3. Se T preserva μ, então T é dita *ergódica* se todo conjunto invariante tem medida 0 ou 1. Em outras palavras, T é ergódica se o *sistema dinâmico mensurável* $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ não admite subsistemas não-triviais.

Definição .4. Um conjunto que é interseção enumerável de conjuntos abertos é dito *conjunto* G_δ.

Definição .5. Um conjunto que é interseção enumerável de conjuntos abertos e densos é chamado de *residual*.

Definição .6. Dado um espaço métrico X, dizemos que uma propriedade P é *genérica* sobre X se o conjunto dos pontos de X que satisfazem P é um conjunto residual.

Definição .7. Denotamos por $\mathcal{H}(I^n, \mu)$ o conjunto de todos os homeomorfismos sobre o cubo unitário n-dimensional que preservam μ (aqui μ é a medida de Lebesgue sobre I^n e será dita *volume*) munido da *métrica uniforme*:

$$d_u(f, g) = \max_{x\in I^n} d(f(x), g(x)) \quad (f, g \in \mathcal{H}(I^n)), \tag{1}$$

onde d denota a distância euclidiana em $\mathbb{R}^n$.

Definição .8. Denotamos por $\mathcal{G}(I^n, \mu)$ o conjunto de todos os automorfismos que preservam o volume μ sobre I^n.
Considere a *métrica uniforme* sobre $\mathcal{G}(I^n, \mu)$:

$$d_1(f, g) = \inf\{\delta > 0 : \mu(\{x : |f(x) - g(x)| > \delta\}) = 0\} \quad (f, g \in \mathcal{G}(I^n, \mu)). \tag{2}$$

Observe que $d_1(f, g) = d_u(f, g)$ sempre que $f, g \in \mathcal{H}(I^n, \mu)$.
Conside também a *métrica fraca* sobre $\mathcal{G}(I^n, \mu)$:

$$d_2(f, g) = \inf\{\delta > 0 : \mu(\{x : |f(x) - g(x)| > \delta\}) < \delta\} \quad (f, g \in \mathcal{G}(I^n, \mu)). \tag{3}$$

Aproximação por permutações diádicas cíclicas

Definição .9. Dados $n \geq 2$ e $m \in \mathbb{N}$ definimos a *decomposição diádica de ordem m de I^n* como a coleção dos $N = 2^{n\dot{m}}$ subcubos congruentes da forma $\left[\frac{i_1}{2^m}, \frac{i_1+1}{2^m}\right] \times ... \times \left[\frac{i_m}{2^m}, \frac{i_m+1}{2^m}\right]$ com $i_1, ..., i_n \in \{0, ..., 2^m - 1\}$.
Denotamos uma decomposição diádica por $\{\sigma_i\}_{i=1}^N$, onde σ_i é o i-ésimo subcubo de uma enumeração fixada arbitrariamente.
Uma *permutação diádica de ordem $m \in \mathbb{N}$* é uma transformação $P : I^n \to I^n$ que age sobre alguma decomposição diádica de ordem m de I^n, digamos $\{\sigma_i\}_{i=1}^N$, da seguinte maneira: $P(\sigma_i) = \sigma_{j(i)}$.

Resultados

Teorema .10. ***(Lax)*** *Dados $h \in \mathcal{H}(I^n, \mu)$ e $\varepsilon > 0$, se $m \in \mathbb{N}$ é suficientemente grande, então existe uma permutação diádica P cíclica de ordem m tal que $d_1(h, P) < \varepsilon$.*

Teorema .11. *Seja P uma permutação diádica cíclica sobre uma decomposição $\{\sigma_i\}_{i=1}^N$ de I^n.*
Então, existe $f \in \mathcal{G}(I^n, \mu)$ ergódico tal que $d_1(P, f) < \max diam(\sigma_i)$, onde $diam(\sigma_i)$ denota o diâmetro de σ_i e $i = 1, \ldots N$.

Teorema .12. ***(Halmos)*** *Seja $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}(I^n, \mu)$ o conjunto dos automorfismos ergódicos. Então, $\mathcal{E}$ é um conjunto G_δ na topologia gerada pela metrica fraca d_2.*

Teorema .13. ***(Alpern)*** *Seja $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}(I^n, \mu)$ um subconjunto G_δ na topologia gerada pela métria fraca d_2.*
Se $\mathcal{H}(I^n, \mu) \subset \overline{\mathcal{E}}^{unif.}$, então $\mathcal{E} \cap \mathcal{H}(I^n, \mu) \subset \mathcal{H}(I^n, \mu)$ é um conjunto G_δ denso na topologia gerada pela métrica uniforme d_1.

Teorema de Oxtoby-Ulam

Teorema .14. ***(Oxtoby-Ulam)*** *Genericamente com respeito à topologia uniforme, um homeomorfismo que preserva a medida de Lebesgue sobre o cubo unitário n-dimensional é ergódico.*

Ideia da prova:
Seja $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}(I^n, \mu)$ o conjunto dos automorfismos ergódicos.
Pelo Teorema de Halmos (Teorema .12), $\mathcal{E}$ é um conjunto G_δ na topologia gerada pela métrica fraca d_2.
Pelo Teorema de Alpern (Teorema .13) é suficiente mostrar que $\mathcal{H}(I^n, \mu) \subset \overline{\mathcal{E}}^{unif.}$.
Sejam $\varepsilon > 0$ e $h \in \mathcal{H}(I^n, \mu)$. Pelo Teorema de Lax (Teorema .10), para cada $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, existe P permutação diádica cíclica de ordem m tal que $d_1(h, P) < \varepsilon/2$.
Pelo Teorema .11, existe $f \in \mathcal{E}$ tal que $d_1(f, P) < \varepsilon/2$, donde $d_1(h, f) < \varepsilon$.
Daí, como $h \in \mathcal{H}(I^n, \mu)$ é arbitrário, obtém-se $\mathcal{H}(I^n, \mu) \subset \overline{\mathcal{E}}^{unif.}$, como desejado.
Para uma exposição completa e detalhada dos resultados acima, veja o trabalho de conclusão de curso de graduação [2].

Agradecimentos

Eu gostaria de agradecer ao Prof. Dr. Rômulo Maia Vermersch pela orientação na realização deste trabalho. Também gostaria de agradecer ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e ao CNPq pelo suporte financeiro.

Bibliografia

[1] Steve Alpern e V. Prasad. Typical Dynamics of Volume Preserving Homeomorphisms. Vol. 139. Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 2001.

[2] Luiz Guilherme de Carvalho Lopes. Homeomorfismos Ergódicos e o Teorema de Oxtoby-Ulam. https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/224913, 2021.

[3] Paul Halmos. Lectures on Ergodic Theory. Chelsea Publishing Company, 1956.

[4] J. C. Oxtoby e S. M. Ulam. "Measure-preserving homeomorphisms and metrical transitivity." Em: Ann. of Math. (2) 42.4 (1941), pp. 874–920.

[5] Marcelo Viana e Krerley Oliveira. Foundations on Ergodic Theory. Vol. 151. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge, 2016. 2