Teorema do ponto fixo de Brouwer em dimensão 1

Jhuliene Cristina Seger[1] e **Prof.ª Naiara Vergian de Paulo Costa**[2]

Universidade Federal de Santa Catarina, SC, Brasil

jhulienecs01@gmail.com[1] naiara.vergian@ufsc.br[2]

Resumo

Neste trabalho estuda-se o Teorema do ponto fixo de Brouwer em dimensão 1, que garante a existência de um ponto fixo sempre que uma função contínua aplica um intervalo fechado dentro de si. Além disso, mostra-se a equivalência do teorema de Brouwer com os teoremas do valor intermediário e do anulamento, ambos estudados em cursos de cálculo diferencial e integral e são demonstrados outros resultados como aplicações do teorema principal, a partir das equivalências comentadas.

Palavras-Chave: compacidade; continuidade; intervalos fechados.

Introdução

A ideia de ponto fixo é um tanto simples e é compreendida como um ponto cuja imagem via certa função é o próprio ponto. Ou seja, dada uma função f e um ponto x_0, se ao aplicar a função obtivermos que $f(x_0) = x_0$, então x_0 é um ponto fixo para f.

Note que, em dimensão 1, encontrar um ponto fixo para uma dada função f é o mesmo que encontrar um ponto de intersecção entre os gráficos de $y = f(x)$ e da função identidade $y = x$.

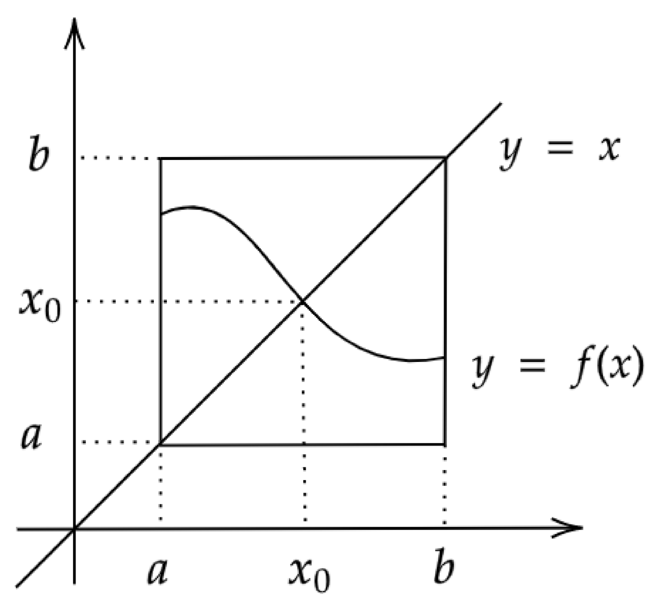


Figura 1: Gráfico de uma função f qualquer e reta $y = x$.

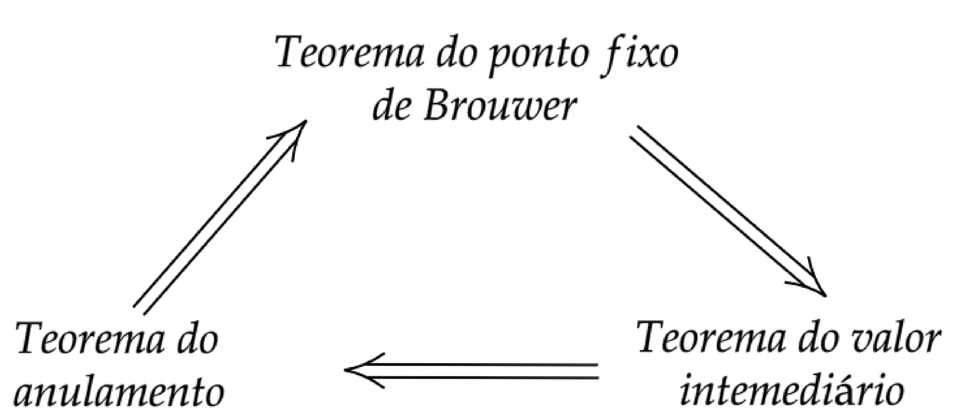
Desenvolvimento

Teorema do ponto fixo de Brouwer em dimensão 1

Teorema 1. *Qualquer função contínua $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ tem pelo menos um ponto fixo, isto é, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

Ideia de demonstração: Divida o intervalo fechado em subintervalos cujos pontos extremos são levados pela função em direções opostas. Assim, encontra-se um ponto fixo em um número finito de iterações ou constrói-se uma sequência de intervalos encaixados em que o comprimento dos intervalos tende a zero. A partir da construção, faz-se uma hipótese por absurdo e chega-se a uma contradição para concluir a demonstração. □

Para mostrar as equivalências do Teorema de Brouwer com os Teoremas do valor intermediário e do anulamento, provamos as implicações como seguem:



Teorema 2 (Valor intermediário). *Seja f contínua definida no intervalo fechado $[a, b]$ tal que $f(a) < f(b)$. Se um número c satisfaz a condição de $f(a) < c < f(b)$, então existe um ponto $x_0 \in [a, b]$ para o qual $f(x_0) = c$.*

Ideia de demonstração: Para mostrar que o Teorema 1 implica no Teorema 2, suponha $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha, sem perda de generalidade, que $f(a) < f(b)$. Daí, considere c um número entre $f(a)$ e $f(b)$. Constrói-se uma função $F : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ dada por $F(x) = \lambda(f(x) - c) + x$ de tal modo que $f(x) = c$ se, e somente se, $F(x) = x$, para algum $\lambda \neq 0$. □

A implicação do Teorema 2 no Teorema 3 é feita supondo f uma função contínua definida em $[a, b]$. Daí, se $f(a) < 0$ e $0 < f(b)$, então 0 está entre $f(a)$ e $f(b)$. Segue que, pelo Teorema 2, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = 0$. □

Teorema 3 (Anulamento). *Se f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, $f(a)$ e $f(b)$ tiverem sinais contrários em relação ao eixo x, então existirá pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.*

Ideia de demonstração: Para mostrar que Teorema 3 implica no Teorema 1, suponha $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ uma função contínua e considere g contínua definida em $[a, b]$ como segue

$$\begin{aligned} g : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x - f(x). \end{aligned}$$

Além disso, suponha que $g(a) \neq 0$ e $g(b) \neq 0$, mostra-se que $g(a) < 0$ e $0 < g(b)$. Daí, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $g(x_0) = 0$, isto é, $x_0 = f(x_0)$. □

Resultados

O próximo resultado garante a existência de pontos antípodas na circunferência C que possuem a mesma imagem para qualquer função contínua $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$.

Teorema 4 (Borsuk-Ulam). *Seja $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, definida em um círculo de raio $r > 0$ e centrado na origem. Então existe um par de pontos antípodas x e x^* tais que $f(x) = f(x^*)$.*

Em relação aos próximos resultados, intuitivamente, o primeiro teorema nos diz que, se tivermos duas panquecas em um prato e quisermos dividi-las igualmente entre duas pessoas, é possível fazê-lo com apenas um corte. Já o segundo teorema nos diz que, se tivermos apenas uma panqueca em um prato e quisermos dividi-la igualmente entre quatro pessoas, é possível fazê-lo com somente dois cortes, desde que sejam perpendiculares.

Teorema 5 (Primeiro Teorema da Panqueca). *Sejam A e B regiões planas limitadas, então há uma reta dividindo cada uma em duas regiões de área igual.*

Teorema 6 (Segundo Teorema da Panqueca). *Se A é uma região plana limitada, então existem duas retas perpendiculares dividindo A em quatro regiões de área igual.*

Conclusões

O teorema de Brouwer faz parte da teoria de pontos fixos, que é uma área de grande relevância com aplicações em diversos ramos do conhecimento, como astronomia, economia, física, meteorologia, e muitas outras. Em particular, na matemática, muitos teoremas de existência podem ser traduzidos em questões relacionadas à existência de pontos fixos. Avalia-se que há inúmeras maneiras de dar continuidade neste trabalho, seja algo voltado à aplicações, seja o estudo de outros teoremas que tratam de pontos fixos.

Referências

[1] Eder Martins; Márcio André Santos; Wenderson Ferreira. *Os Teoremas das Panquecas*. Revista de Matemática de Ouro Preto, v.06 n.01, 2019.

[2] Yu A. Shashkin. *Fixed Points*. Traduzido do Russo por Viktor Minachin, AMS, vol. 2, 1991.