SÉRIES DE FOURIER E O PROBLEMA CLÁSSICO DA EQUAÇÃO DO CALOR NA BARRA FINITA

MATHEUS MIOTTO CALIONE[1], ELEOMAR CARDOSO JÚNIOR[2]

Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, SC, Brasil

matheusmcalione@gmail.com[1], eleomar.junior@ufsc.br[2]

Introdução

A EDP que descreve a temperatura $u(x,t)$ em uma barra de comprimento $l > 0$ extremamente fina e feita de um material homogêneo condutor de calor é dada por $u_t = \alpha^2 u_{xx}$, em que α é uma constante denominada difusidade térmica e varia de acordo com o material da barra. O físico e matemático francês Joseph Fourier (1768-1830) analisou o Problema da Equação do Calor em uma Barra Finita:

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, \ \ (x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \ t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), x \in [0,l], \end{cases} \tag{1}$$

cuja solução u depende da posição x da barra de tamanho l e do tempo t. Fourier utilizou o Método da Separação de Variáveis e o Princípio da Superposição para determinar que a solução do problema (1) pode ser dada por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right), \tag{2}$$

em que $x \in [0,l]$ e $t \geq 0$. Para que a solução (2) satisfaça o problema (1), entretanto, é preciso que f seja dada por uma série de Fourier.

Objetivos

O objetivo deste trabalho é realizar uma abordagem teórico-matemática sobre o problema da equação do calor em uma barra finita, para que então sejamos levados a analisar as séries de Fourier e, em um contexto geral, entender sob quais circunstâncias o problema (1) apresenta uma solução que, por sua vez, é única.

Fundamentação

Para realização desse estudo, foi necessário, inicialmente, nos debruçarmos obre as teorias de [1] e [4], uma vez que conceitos como Convergência de Sequências e Séries de Funções e Equações Diferenciais Ordinárias foram essenciais para que pudéssemos estudar as séries de Fourier e, consequentemente, o problema no qual estávamos interessados. Para o estudo acerca das Séries de Fourier, nos baseamos em [2] e [3]. A referência [3] foi a principal do trabalho, uma vez que analisamos e detalhamos diversos resultados apresentados pela autora também para o estudo da solução do PVIC (1).

Desenvolvimento e Metodologia

Utilizando os Teoremas do Teste M de Weiestrass e da Convergência Uniforme de uma Série de Fourier, conseguimos provar o seguinte resultado:

Teorema 1: Suponha que $f \in C([0,l])$, com $f(0) = f(l) = 0$. Suponha que f seja diferenciável em $[0,l]$ a menos de um conjunto finito de pontos com $f' \in SC([0,l])$. Então, a série

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right)$$

com $x \in [0,l]$ e $t \geq 0$, em que

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \ n \in \mathbb{N},$$

converge uniformemente em $[0,l] \times [0,+\infty)$ para uma função $u \in C([0,l] \times [0,+\infty)) \cap C^\infty([0,l] \times (0,+\infty))$, que é a solução PVIC (1).

Se $u(x,t)$ for, de fato, solução do PVIC (1), definimos a *Integral de Energia*, que é dada por

$$E(t) = \int_0^l (u(x,t))^2\, dx, \ t \geq 0. \tag{3}$$

Essa definição é relevante para provarmos o seguinte resultado:

Teorema 2: Se o problema (1) tiver solução em $C([0,l] \times [0,+\infty)) \cap C^2([0,l] \times (0,+\infty))$, então ela será única.

Com isso, garantimos que, se o problema (1) apresentar solução, então ela será única.

Aplicações

Vejamos um exemplo de aplicação direta dos Teoremas 1 e 2. Consideremos a equação do calor com $\alpha = 1$ que cuja solução é a temperatura em uma barra de tamanho π tal que a condição inicial seja

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ -x+\pi, & \text{se } \ x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}.$$

Pelos Teoremas 1 e 2, a série

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{4}{\pi n^2} \mathrm{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right] \mathrm{sen}(nx) \exp\left(-n^2 t\right) \tag{4}$$

converge uniformemente em $[0,\pi] \times [0,+\infty)$ para uma função $u \in C([0,\pi] \times [0,+\infty)) \cap C^\infty([0,\pi] \times (0,+\infty))$, que é a única solução do PVIC em questão. Utilizando os trinta primeiros termos dessa série, a aproximação do gráfico de $u(x,t)$ considerando $x \in [0,\pi]$ e $t \in [0,10]$ é representada pela Figura 1 e a diminuição da temperatura pode ser constatada na Figura 2 por meio de uma análise gráfica considerando x arbitrário e t fixo:

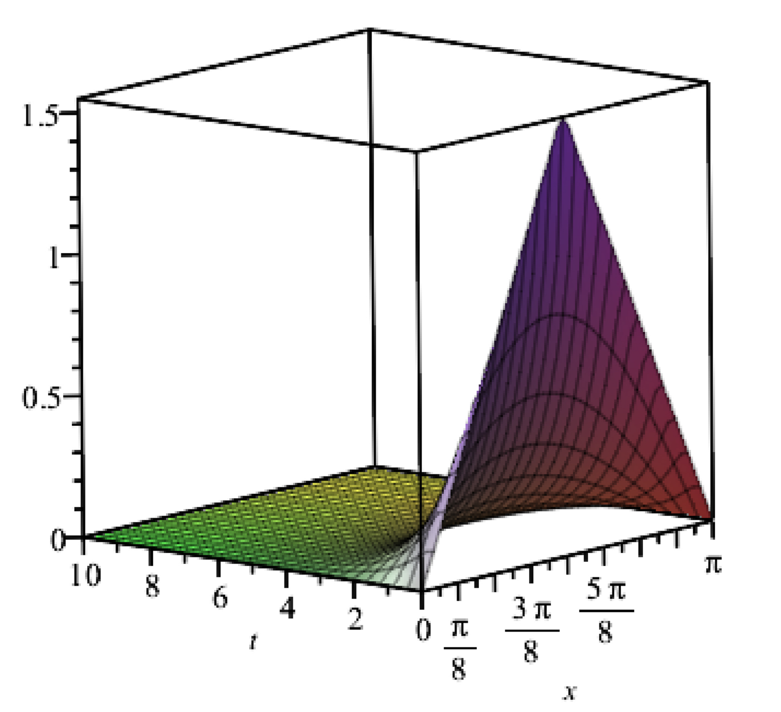

Figura 1: Gráfico da função dada pela soma dos trinta primeiros termos da série (5), plotado com auxílio do software *Maple*.

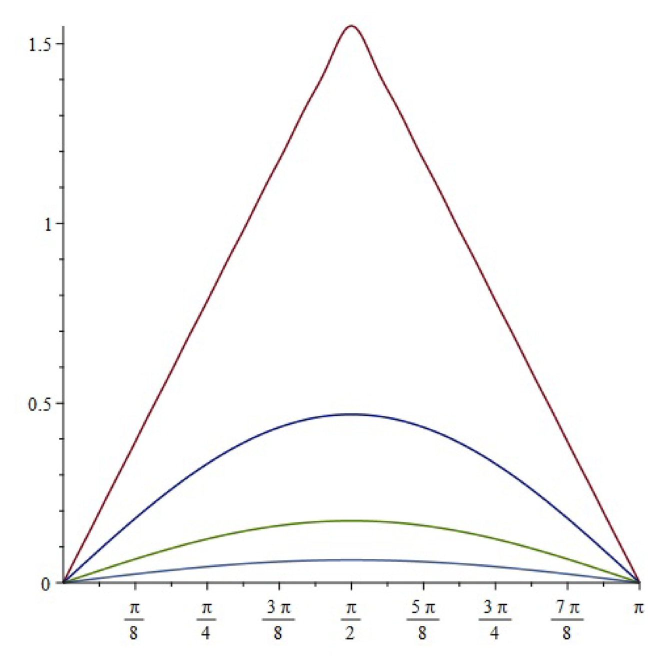

Figura 2: Gráficos da função que aproxima $u(x,t)$, respectivamente, com $t=0$, $t=1$, $t=2$ e $t=3$, plotados com auxílio do software *Maple*.

Considerações Finais

Uma particularidade do problema (1) é a dependência contínua de soluções. Isto é, se tomarmos condições iniciais próximas, as soluções que geraremos estarão, de certa forma, próximas. Além disso, o que foi desenvolvido nesse trabalho vale especificamente para o problema (1). Se mudarmos as condições iniciais ou de contorno, a teoria a ser desenvolvida não é necessariamente a mesma.

Referências

[1] LIMA, Elon Lages. **Análise Real**: Funções de Uma Variável. 12. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2016.

[2] SODRÉ, Ullysses. **Notas de Séries de Fourier.** Notas de aula, UEL, 2003.

[3] IÓRIO, Valéria de Magalhães. **EDP: Um Curso de Graduação.** Coleção Matemática Universitária: Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2010.

[4] ZILL, Dennis G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**: 9ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.