TEOREMA DE GAUSS—BONNET:
Uma abordagem moderna

Monica Maria Funk Drechsler[1]
Orientador: Francisco Carlos Caramello Junior[2]
Universidade Federal de Santa Catarina, SC, Brasil

monica.drechsler@grad.ufsc.br[1], francisco.caramello@ufsc.br[2]

Palavras-Chave: Teorema de Gauss—Bonnet; Geometria Diferencial; Topologia.

Introdução e Objetivos

O Teorema de Gauss--Bonnet é um dos mais célebres resultados na geometria diferencial clássica das curvas e superfícies. Além disso, sua generalização moderna para variedades de dimensão maior, devida a Chern, também é tratada com o mesmo apreço.

Ao estabelecer que a integral da curvatura Gaussiana de uma superfície se iguala à característica de Euler da mesma multiplicada pela constante circular, estamos relacionando dois invariantes diferentes: uma propriedade geométrica local e uma característica topológica global, o que torna o resultado, no mínimo, contraintuitivo e, por tal motivo, surpreendente.

O nosso principal objetivo neste trabalho é demonstrar o Teorema de Gauss--Bonnet usando ferramentas e conteúdos modernos. Desse modo ainda iremos utilizar conteúdos multidisciplinares e fornecer um material que pode vir a servir como introdução a alunos da graduação.

Fundamentação Teórica

A metodologia de desenvolvimento se trata da usual em matemática, envolvendo consulta à bibliografia especializada de forma a compilar uma série de conceitos e resultados necessários a fim de obter por fim a demonstração do teorema almejado e uma compreensão maior dos objetos de estudo.

Desenvolvimento

De maneira formal, uma superfície se trata do conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ onde, para cada $p \in S$, existe um $U \subset \mathbb{R}^2$ e uma vizinhança aberta V de p em S e uma função diferenciável $X: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de forma que:

- $X(U) = V$;
- $X: U \longrightarrow V$ é um homeomorfismo;
- $(dX)_q: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva para todo $q \in U$

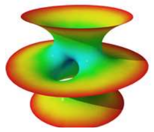

Figura 1: Superfície Costa. Fonte: Wikipedia., 2012.

Cada função X chamamos de parametrização. A união das imagens forma a nossa superfície. Podemos pensar tal função como um mapa que nos guia se estivéssemos andando em nossa superfície, sendo, a derivada da curva percorrida, a nossa velocidade percorrendo aquele caminho. Mais ainda, tendo a união das derivadas no ponto $p \in S$ construímos o T_pS, plano tangente a superfície que passando por tal ponto. Um vetor perpendicular ao plano T_pS em p é chamado vetor normal. A união destes vetores normais forma um campo que, no caso de superfícies conectadas, define uma orientação.

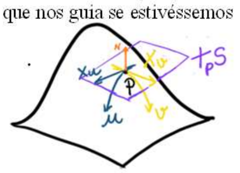

Figura 2: Superfície, vetor velocidade, plano tangente a superfície e vetor normal. Fonte: Autora., 2022.

A aplicação Gaussiana $N(p)$ irá tomar um vetor deste campo normal, normalizá-lo e jogá-lo na esfera de raio 1. A diferencial desta aplicação dN_p é auto-adjunta, e portanto, tem dois autovalores reais. O produto deles se trata da curvatura Gaussiana $K(p)$, ou ainda, $\mathrm{K(p)} = \det(dN_p)$.

Alternativamente, a curvatura gaussiana pode ser vista também como o produto entre a curvatura máxima e mínima das curvas γ determinadas por $S \cap V$ sendo V plano que contém N(p).

$$K(p) = \text{máx}(\kappa_n(p)) \cdot \min(\kappa_n(p))$$

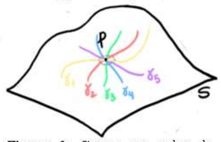

Figura 3: Curvas ao redor do ponto. Fonte: Autora., 2022.

Figura 4: Exemplo de superfície compacta. Fonte: Wikipedia., 2012.

Do outro lado, a característica de Euler $\chi(S)$ pode ser obtida usando uma triangulação da superfície e então contando o número de vértices, arestas e faces, tendo $\chi(S) = V - A + F$. Vale pontuar que tal número é invariante por homeomorfismos.

Uma outra forma de se calcular tal número utiliza princípios da topologia algébrica. Para tal, utilizamos a noção de *n-simplexos*, a figura mais simples com n lados. Para exemplificar, um *0-simplexo* seria um ponto, um *1-simplexo* um segmento de reta, e assim por diante. Estes simplexos são organizados e listados, de modo que exista uma orientação nestes objetos.

Existe um operador bordo que associa a cada n-simplexo uma soma de (n-1)-simplexos que compõem seu bordo, criando uma sequência exata Podemos então tomar os grupos de homologia desta sequência de tal modo que

Figura 5: Decomposição do Toro em simplexos, Autora, 2022.

$$\chi(S) = \sum_{i=1}^{2} (-1)^i \dim H_i(S).$$

Unindo todas estas noções, temos o Teorema de Gauss—Bonnet em sua forma local: seja $\sigma: \Delta^2 \to S$ um simplexo suave não degenerado e ε_i, com $i = \{1,2,3\}$ seus ângulos externos, então

$$\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i + \int_\gamma \kappa_n dt + \int_\gamma K d\sigma = 2\pi.$$

Resultados principais

Para a demonstração do teorema em sua versão local utilizamos o teorema do índice de rotação (*Umlaufsatz).* Ele nos afirma que o índice de rotação de um polígono curvo positivamente orientado é +1. Então, pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\begin{aligned} 2\pi = \theta_a - \theta_b &= \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i + \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \theta'(t)dt \\ &= \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i + \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t} \kappa_n(t)dt + \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \omega(\gamma'(t))dt \\ &= \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i + \int_\gamma \kappa_n dt + \int_\gamma K d\sigma. \end{aligned}$$

Com $\omega(v) = g(\nabla_v E_1, E_2)$

A partir da versão local se chega então no teorema geral. Para isto, triangula-se a superfície e orientando-a de modo que as arestas dos triângulos se anulem. Desta forma, ao aplicar o teorema em todos os triângulos e somá-los, sendo S uma superfície compacta, obtemos o seguinte resultado, conhecido como Teorema de Gauss—Bonnet:

$$\int_S K d\sigma = 2\pi\chi(S).$$

Conclusões

O estudo desses resultados, além de propiciarem o contato com vários conceitos básicos importantes da geometria diferencial também motiva o estudo de tópicos modernos relevantes relacionados a eles, como sua generalização para variedades de dimensão par qualquer (o Teorema de Chern-Gauss-Bonnet) e, mais geralmente, o estudo da representação de classes características via curvatura. Nesse sentido, cita-se o teorema do índice de Atiyah-Singer, que generaliza ainda mais o teorema de Chern, para índices de operadores diferenciais elíticos.

Referências

[1] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2002.
[2] E. L. Lima, *Curso de análise,* Vol. 1, 12ª edição, IMPA, Rio de Janeiro, 2010.
[3] J. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds,* 2ª edição, Springer, Nova Iorque, 2013
[4] J.R. Weeks, *The shape of space,* Marcel Dekker, Inc., 2002.
[5] K. Ueno et al., *A Mathematical Gift, I: The Interplay Between Topology, Functions Geometry, and Algebra*, Vol. 19, American Mathematical Soc., 2003.
[6] S. Montiel e A. Ros, *Curves and surfaces,* Vol. 69. American Mathematical Soc., 2009.